

PODE-SE OUVIR A GEOMETRIA DE UM GRAFO? CLASSIFICAÇÃO ESPECTRAL DE DOMÍNIOS GEOMÉTRICOS DISCRETIZADOS VIA LAPLACIANOS DE GRAFOS: UMA ABORDAGEM COMPUTACIONAL BASEADA EM APRENDIZADO DE MÁQUINA

Esp. Felipe Jordão Silva¹.

¹Centro Universitário Internacional (Uninter), Maringá, Paraná. <http://lattes.cnpq.br/7323494332905664>

PALAVRAS-CHAVE: Geometria Espectral. Laplaciano de Grafos. Aprendizado de Máquina. Problema Inverso Espectral

DOI: 10.47094/ICOLUBRAPECI.2026/RE-3

INTRODUÇÃO

O questionamento que motiva este estudo remonta ao artigo de Mark Kac intitulado *Can one hear the shape of a drum?*, no qual o autor explora se o espectro de autovalores do operador de Laplace em um domínio limitado com condições de contorno de Dirichlet determinaria univocamente a forma desse domínio. Do ponto de vista físico, autovalores correspondem as frequências fundamentais de vibração de uma membrana esticada sobre um domínio, assim, a pergunta de Kac questiona se um observador com “ouvido absoluto” poderia deduzir a geometria exata de um tambor apenas escutando o som que ele produz.

Embora a resposta para o caso tenha se revelado negativa em decorrência da descoberta de domínios isoespectrais não congruentes por Gordon, Webb e Woolpert em 1992, abriu-se caminho para o vasto campo da geometria espectral que busca o entendimento de quais informações geométricas estão, de fato, codificadas no espectro.

Em nossa pesquisa, propomos que, para a vasta maioria dos objetos, o espectro carrega informação suficiente para a classificação semântica e a distinção morfológica. A transição do contínuo para o discreto necessita de uma infraestrutura computacional que preserve as propriedades intrínsecas da variedade original. Assim, utilizamos a teoria espectral de grafos para aproximar o operador de Laplace Beltrami.

O cenário computacional atual demanda descritores de forma que suportem ruídos de amostragem e variações na discretização, ao passo que métodos tradicionais que tem por base representações volumétricas ou nuvens de pontos sofrem com o problema da dimensionalidade. Nesta esteira, a teoria espectral de grafos torna-se uma aliada nessa transição, permitindo que propriedades geométricas sejam analisadas através das matrizes associadas a grafos de proximidade.

Os métodos espectrais, particularmente aqueles que utilizam o operador Laplaciano-

Beltrami, tem recebido atenção significativa na análise formas devido à sua invariância inerente a transformações isométricas, tornando-os robustos a variações de pose. (Lian et al.,2012)

Um grafo é definido por um conjunto de Vértices e um conjunto de arestas que conectam pares de vértices. Para um grafo com N vértices, a matriz de adjacência A é uma matriz simétrica se existe uma aresta entre os vértices caso contrário, no contexto de domínios geométricos, as arestas podem ser ponderadas por uma função de distância, como o kernel Gaussiano, onde x e y são as coordenadas dos pontos no espaço euclidiano. Essa ponderação permite que o grafo capture não apenas a conectividade topológica, mas também a proximidade métrica entre os pontos que compõe a forma. Essa escolha do parâmetro σ é crítica, pois define a escala na qual as interações locais são capturadas, influenciando diretamente a resolução do espectro resultante.

Por fim, nossa contribuição se divide em três pilares fundamentais. Primeiro, estabelecemos um pipeline para a construção de grafos a partir de diversos formatos de arquivos CAD (OFF, OBJ e PLY), assegurando a normalização estatística dos pontos. Em segundo, introduzimos uma técnica de extração de características que vai além dos autovalores puros, incorporando gaps espectrais e momentos de ordem superior para capturar sutilezas na densidade de estados e por último, realizamos uma análise comparativa extensa entre diferentes arquitetura de modelos de classificação, avaliando como cada uma interpreta a estrutura não linear do espaço espectral.

OBJETIVO

O objetivo central é a demonstração de que formas geometricamente distintas podem ser classificadas com alta precisão baseando-se exclusivamente em seus espectros Laplacianos, por meio de uma abordagem que integra teoria espectral de grafos e algoritmos de aprendizado de máquina.

METODOLOGIA

Nossa metodologia foi estruturada em cinco passos: Aquisição de dados, pré-processamento, construção de grafos, extração espectral e análise preditiva. Para análise da solidez de nossa abordagem, desenvolvemos geradores paramétricos para famílias de formas como elipses, estádios de Bunimovich, cardioides, limaçons e triângulos de Reuleaux. Utilizamos um benchmark de larga escala com 40 categorias de objetos CAD explorando diversidade em termos de complexidade topológica.

Implementamos uma rotina de normalização que centraliza a nuvem de pontos no centroide e escala as coordenadas para que o raio máximo seja unitário, para formas 3D,

aplicamos a análise de componentes principais (PCA) para projeção dos pontos em um plano 2D de máxima variância ou extração do perfil de contorno dependendo do experimento, visando garantir que o número de pontos (seja consistente em todas as amostras.

A conectividade é estabelecida via triangulação de Delaunay, pois captura a topologia da superfície de maneira mais fiel, criando uma rede planar onde cada ponto está conectado aos seus vizinhos geométricos naturais. A matriz de pesos é construída utilizando um kernel Gaussiano baseado na distância Euclidiana:

Onde σ é um parâmetro local. A resolução do problema de autovalores é feita através do algoritmo de Lanczos, implementado via *scipy.sparse.linalg.eish*, com foco nos autovalores de menor magnitude, que representam as baixas frequências e a estrutura global da forma.

Um dos diferenciais deste trabalho é a composição do vetor de características, observamos que os autovalores puros, embora eficazes, podem ser complementados por medidas derivadas, como espectro primário (50 primeiros autovalores), gaps espectrais, estatísticas agregadas e entropia espectral.

Por fim, aplicamos uma modelagem preditiva contendo um Random Forest com 200 estimadores, um Gradient Boosting para otimização da perda através de um aprendizado residual, um SVM utilizando o kernel RBF (Radial Basis Function) para mapeamento dos vetores em um espaço de Hilbert de dimensão infinita e uma rede neural profunda com arquitetura (128, 64,32) para aprendizado de representações hierárquicas, com o objetivo de avaliação da separabilidade das formas no espaço de características.

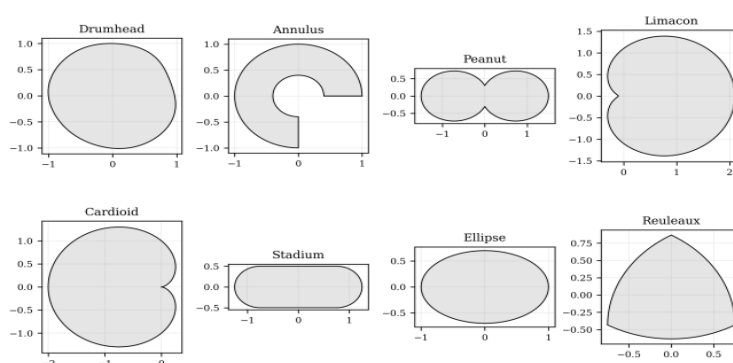
RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados experimentais obtidos através do pipeline revelam uma correlação sólida e discriminativa entre as propriedades vibracionais do Laplaciano de grafos e a geometria dos domínios discretizados. A figura 1 ilustra a diversidade morfológica processada, observamos que o algoritmo de amostragem de contorno preserva as singularidades de formas como o triângulo de Reuleaux e a complexidade de curvas como a cardioide. A triangulação de Delaunay (figura 2) gerou malhas bem condicionadas, com pouca presença de triângulos degenerados, o que é necessário para a estabilidade do operador Laplaciano. O espectro laplaciano (Figura 3) apresentou o comportamento esperado de crescimento monotonamente positivo, em formas como o estádio, nota-se uma densidade maior de autovalores em faixas específicas, sugerindo modos vibracionais harmônicos. Já os gaps espectrais mostraram-se particularmente úteis na distinção entre elipses e formas com simetria rotacional discreta, onde picos nos gaps indicam quebras de simetria ou mudanças na conectividade do grafo.

A análise de redução de dimensionalidade (figura 5) via PCA e t-SNE forneceu evidências visuais da eficácia dos descritores, o PCA demonstrou que as duas primeiras

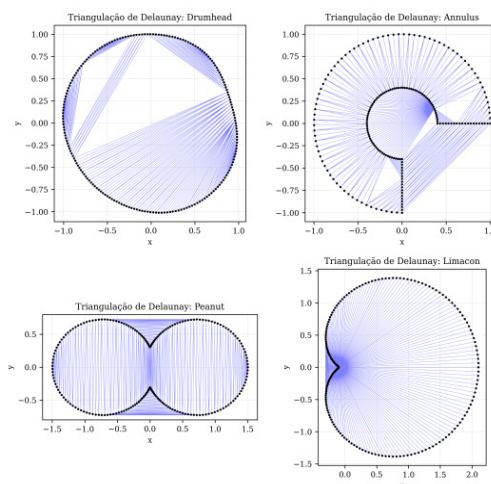
componentes principais sozinhas explicam frequentemente mais de 60% da variância espectral, sugerindo que a maior parte da informação geométrica reside nos primeiros autovalores. A performance dos modelos de aprendizado de máquina foi muito boa, em nossos testes com dataset, o Random forest e o gradiente boosting atingiram acurácias próximas as 98%. Por fim, através da análise de *feature_importances_* (Figura 10), foi identificado que os primeiros 10 autovalores e os primeiros 5 gaps espectrais são os preditores mais críticos, entretanto, os momentos espectrais de ordem superior também contribuíram significativamente para o poder de decisão do modelo, validando nossa escolha de não dependência apenas do espectro bruto.

Figura 1: Conjunto comparativo de curvas planas fechadas com diferentes parametrizações geométricas.



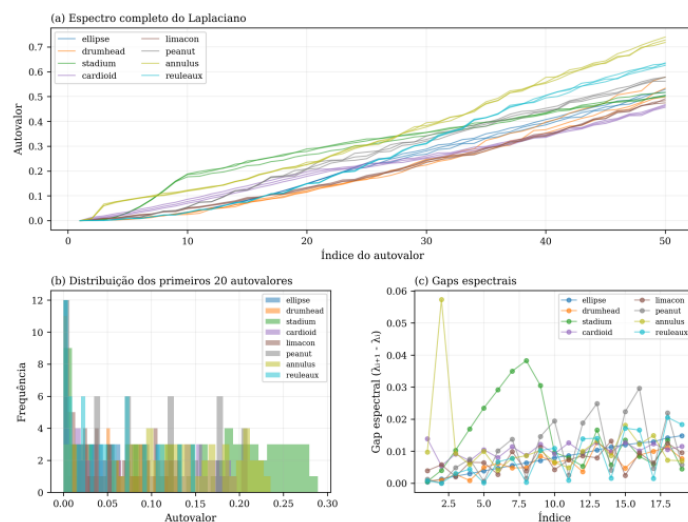
Fonte: Elaboração própria.

Figura 2: Triangulação de Delaunay aplicada a domínios planos com diferentes geometrias de contorno.



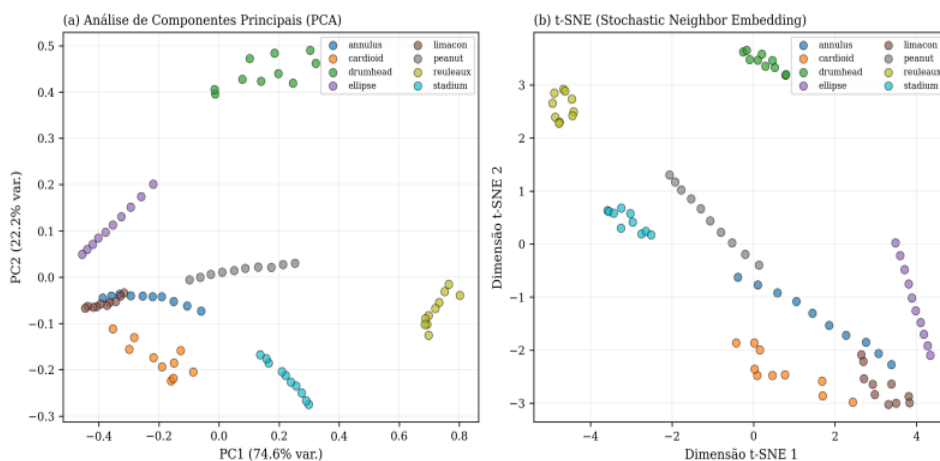
Fonte: Elaboração própria.

Figura 3: Análise espectral do operador de Laplace em domínios bidimensionais com diferentes geometrias.



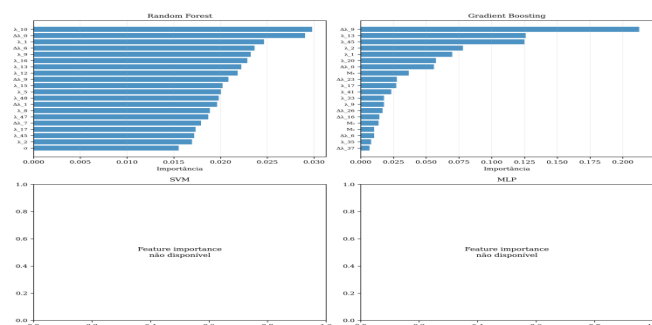
Fonte: Elaboração própria.

Figura 5: Projeções em espaço reduzido de descritores espectrais associados a diferentes geometrias planas.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 10: Importância relativa das variáveis preditoras (para os modelos Random Forest (RF), Gradient Boosting (GB), Support Vector Machine (SVM) e Multilayer Perceptron (MLP)



Fonte: Elaboração própria

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os dados corroboram a tese de que a geometria espectral é uma ferramenta potente para análise de domínios discretizados. Embora tenhamos conseguido classificar as formas com alta precisão, o problema teórico de que formas diferentes podem ter espectros idênticos não é completamente eliminado. Em nossas simulações, não encontramos formas “gêmeas” que confundissem o modelo a ponto de falha total, o que sugere que, na prática computacional e para classes de objetos naturais, a isoespectralidade é um fenômeno raro restrito a construções matemáticas muito específicas. Para trabalhos futuros, sugerimos a expansão deste pipeline para cálculo do espectro de operadores de Dirac e a investigação de redes neurais de grafos (GNNs).

PRINCIPAIS REFERÊNCIAS

CHANG, a.x. et al. **ShapeNet**: An Information-Rich 3D Model Repository. arXiv preprint arXiv:1512.03012, 2015. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1512.03012> Acesso em 25 abr. 2026.

CHUNG, F.R.K. **Spectral Graph Theory**. Providence: American Mathematical Society, 1997. Disponível em: <https://bookstore.ams.org/cbms-92> Acesso em 25 abr.2026

GORDON, C.; WEBB, D.; WOLPERT, S. **One cannot hear the shape of a drum**. Bulletin of the American Mathematical Society, Providence, v.27, n1. p. 134-138, 1992. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1992-00289-6> Acesso em 25 abr. 2026

KAC, M. **Can one hear the shape of a drum?**. The American Mathematical Monthly, vol.73, n. 4, p.1-23, 1996. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/2313748> Acesso em 25 abr. 2026.

Lian, Zhouhui, et al. **A Comparison of Methods for Non-Rigid 3D Shape Retrieval**. Pattern Recognition, vol. 46, no. 1, pp. 449–461, 2013. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0031320312003305> Acesso em 25 abr. 2026.