XXII Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Engenharia Geotécnica
XI Simpósio Brasileiro de Engenheiros Geotécnicos Jovens
24 a 28 de agosto de 2026 – Brasília/DF
DOI: 10.47094/COBRAMSEG2026.5/93

Recalque de Adensamento Primário Devido a Carregamento Linearmente Crescente

Vitor dos Santos Albuquerque
Doutorando, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, vitoralbuquerque9@gmail.com

Celso Romanel
Pesquisador, Instituto TecGraf, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, celso.romanel@gmail.com

RESUMO: As equações da teoria clássica do adensamento aplicam-se a situações em que o carregamento pode ser assumido instantâneo. Há situações de interesse prático, nas quais essa hipótese não é adequada, necessitando a estimativa do recalque de uma camada de solo sujeita a incrementos graduais de tensão vertical durante um período de tempo prolongado. Vários métodos para estimativa dos excessos de poropressão e cálculo do recalque de adensamento primário sob carregamento dependente do tempo foram propostos na literatura, dentre os quais os propostos por Terzaghi (1943), Shiffman (1958) e Olson (1977), aplicáveis em casos onde os incrementos de carregamento geram distribuições iniciais uniformes de poropressão ao longo da espessura da camada e a drenagem é permitida em ambos os contornos da camada de argila. Situações práticas, contudo, podem envolver distribuições não uniformes, como na variação do nível do lençol freático. O presente artigo apresenta duas soluções para carregamento dependente do tempo considerando variação linear da tensão total na profundidade e no tempo. A primeira admite que os incrementos de carregamento geram distribuições triangulares de excessos iniciais de poropressão, simulando o rebaixamento gradual do nível do lençol freático, considerando uma camada de argila com contorno inferior permeável. A segunda solução é semelhante, porém considerando impermeável o contorno inferior da camada de argila, para representação da construção de aterros hidráulicos.

PALAVRAS-CHAVE: Adensamento Primário, Carregamento Linearmente Crescente, Carregamento Não Instantâneo.

ABSTRACT: The equations of classical consolidation theory apply to situations where loading can be assumed instantaneous. There are situations of practical interest where this hypothesis is not adequate, requiring the estimation of the settlement of a soil layer subjected to gradual increases in vertical stress over a prolonged period of time. Several methods for estimating excess pore pressure and calculating primary consolidation settlement under time-dependent loading have been proposed in the literature, including those proposed by Terzaghi (1948), Shiffman (1958), and Olson (1977), applicable in cases where loading increments generate uniform initial pore pressure distributions along the thickness of the layer and drainage is permitted on both boundaries of the clay layer. Practical situations, however, may involve non-uniform distributions, such as variations in the water table level. This article presents two solutions for time-dependent loading considering linear variation of total stress with depth and time. The first approach assumes that load increments generate triangular distributions of initial excess pore pressure, simulating the gradual lowering of the water table, considering a clay layer with a permeable lower boundary. The second solution is similar, but considers impermeable the lower boundary of the clay layer, to represent the construction of hydraulic embankments.

KEYWORDS: Primary Consolidation, Time Dependent Loading, Non-Instantaneous Loading.

1 INTRODUÇÃO

Uma das contribuições mais significativas de Karl Terzaghi para a engenharia geotécnica foi a teoria do adensamento unidimensional (Terzaghi, 1923, 1925), consequência de outra contribuição fundamental: o princípio das tensões efetivas em solos saturados de baixa permeabilidade (Terzaghi, 1923).

A teoria do adensamento de Terzaghi baseia-se em algumas hipóteses simplificadoras, dentre as quais se destaca a consideração de um carregamento de extensão lateral infinita aplicado instantaneamente. Diversos métodos para estimar o excesso de poropressão e o recalque de adensamento primário devido a um carregamento não instantâneo, aplicado linearmente no tempo, foram propostos na literatura (Terzaghi, 1943; Schiffman, 1958; Olson, 1977; Zhu & Yin, 1998; Conte & Troncone, 2006; Hanna et al., 2013; Carneiro et al., 2021).

As duas abordagens mais conhecidas são o método empírico de Terzaghi (1943) e a solução analítica de Olson (1977). O método de Terzaghi é uma abordagem gráfica aplicada diferentemente para tempos antes $(0 < t \leq t_c)$ e após $(t > t_c)$ o tempo de construção t_c. Após o final da construção, a curva de recalque instantâneo é deslocada no tempo em meio período de construção $(t - 0{,}5t_c)$. Durante a construção, a estimativa do recalque no tempo t é feita considerando o recalque instantâneo no tempo $t/2$ multiplicado pela fração do carregamento total aplicado em t. O grau de adensamento médio para carregamento não instantâneo U_v^{ni} pode ser numericamente determinado pela Eq. (1).

$$U_v^{ni}(T_v) = \begin{cases} \dfrac{T_v}{T_c} U_v^i\left(\dfrac{T_v}{2}\right) & T_v \leq T_c \\ U_v^i\left(T_v - \dfrac{T_c}{2}\right) & T_v > T_c \end{cases} \tag{1a}$$

onde U_v^i é o grau de adensamento médio para carregamento instantâneo e os fatores tempo T_v e T_c são definidos em função do coeficiente de adensamento c_v e do máximo comprimento de drenagem H_d na camada de argila.

$$T_v = c_v t / H_d^2 \quad T_c = c_v t_c / H_d^2 \tag{1b}$$

Olson (1977) discretizou o carregamento em rampa em incrementos infinitesimais. Para cada incremento, aplicou a solução de adensamento unidimensional de Terzaghi para carregamento instantâneo para estimativa do incremento de excesso de poropressão. A equação diferencial foi integrada ao longo do tempo, o que permitiu o cálculo do grau de adensamento médio não instantâneo conforme Eq. (2).

$$U_v^{ni}(T_v) = \begin{cases} \dfrac{T_v}{T_c}\left[1 - \dfrac{1}{T_v}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M^4}\left(1 - e^{-M^2 T_v}\right)\right] & T_v \leq T_c \\ 1 - \dfrac{1}{T_c}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M^4}\left(e^{M^2 T_c} - 1\right)e^{-M^2 T_v} & T_v > T_c \end{cases} \tag{2}$$

onde $M = \frac{\pi}{2}(2m + 1)$

O método de Terzaghi tende a superestimar o grau médio de adensamento quando comparado à solução de Olson, com uma diferença de aproximadamente 10% (Hanna et al., 2013). Com o objetivo de reduzir essa diferença, Hanna et al. (2013) propuseram uma pequena modificação no método de Terzaghi, de modo que o carregamento em rampa passe a ser considerado como aplicado instantaneamente no tempo $2t/5$, durante o período de construção, em vez da fração de tempo usualmente adotada $t/2$.

Considerando que as soluções propostas por Terzaghi e Olson são aplicáveis apenas nos casos em que os incrementos de tensão total vertical geram incrementos de excessos de poropressão uniformes ao longo da

espessura da camada de argila, e que a drenagem é permitida em ambos os contornos, este artigo tem como objetivo principal apresentar duas soluções para carregamentos dependentes do tempo, com variação linear da tensão total na profundidade e no tempo. A primeira, considera incrementos que geram distribuições triangulares de excessos de poropressão, com a base da camada de argila considerada permeável, simulando um rebaixamento gradual do nível do lençol freático, enquanto que a segunda solução é semelhante, mas a base da camada de argila é admitida impermeável, representando a construção de aterros hidráulicos.

2 ADENSAMENTO 1D COM CARREGAMENTO DEPENDENTE DO TEMPO

2.1 Solução 1: Excesso inicial de poropressão linear com a profundidade e base da camada de argila em contorno permeável

Para a determinação desta solução, mantiveram-se todas as hipóteses clássicas da teoria do adensamento primário proposta por Terzaghi (1943), exceto pela consideração adicional de que a tensão vertical total é dependente da profundidade e do tempo. Introduzindo-se os parâmetros adimensionais T_v' e $Z = z/H$, onde z é a profundidade de um ponto a partir do topo da camada e H é a espessura da camada de argila, então a equação do adensamento primário 1D pode ser expressa pela Eq. (3).

$$c_v \frac{\partial^2 u_e^{ni}}{\partial z^2} = \frac{\partial u_e^{ni}}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_v}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial^2 u_e^{ni}}{\partial Z^2} + \frac{\partial \sigma_v}{\partial T_v'} = \frac{\partial u_e^{ni}}{\partial T_v'} \tag{3a}$$

Os fatores tempo T_v' e T_c' são agora definidos em termos da espessura H da camada:

$$T_v' = c_v t / H^2 \quad T_c' = c_v t_c / H^2 \tag{3b}$$

No desenvolvimento dessa primeira solução, o acréscimo de tensão total vertical é assumido variar linearmente com a profundidade e com o tempo, conforme Fig. 1 e Eq. (4), permanecendo constante após o fator tempo de construção T_c' . As condições de contorno associadas ao problema são apresentadas na Eq. (5).

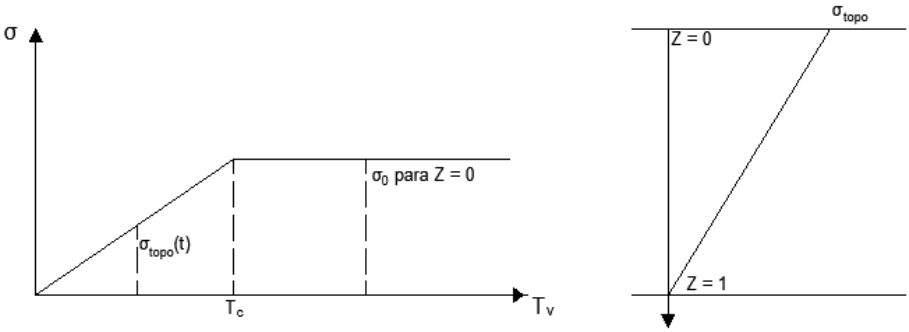


Figura 1. Variação da tensão total com a profundidade e tempo – drenagem simples

$$\sigma_v = \sigma_0 (1 - Z) \frac{T_v'}{T_c'} \quad T_v' \leq T_c' \tag{4}$$

$$\begin{cases} u_e^{ni}(0, T_v') = 0 \\ \dfrac{\partial u_e^{ni}}{\partial Z}(1, T_v') = 0 \\ u_e^{ni}(Z, 0) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

A solução da Eq. (3) foi obtida por meio de duas abordagens distinas aplicadas à resolução de equações diferenciais parciais não homogênas. A primeira delas baseia-se no método de expansão por autofunções,

enquanto a segunda utiliza a mudança da variável dependente, abordagem na qual se admite que a solução de uma equação não homogênea pode ser representada pela soma de duas parcelas: uma solução homogênea e uma solução particular (ou complementar).

As Eqs. (6) e (7) apresentam, respectivamente, as expressões resultantes para os excessos de poropressão e para o grau médio de adensamento primário, nos períodos pré e pós-construção, considerando a primeira abordagem de resolução. Por sua vez, as Eqs. (8) a (11) reúnem as expressões derivadas da aplicação da segunda abordagem anteriormente mencionada.

A Fig. 2. ilustra, para diferentes valores de T_c', a variação do grau médio de adensamento em função de T_v' considerando as Eqs. (7) e (11) e a proposta por Zhu & Yin (1998). Nota-se na figura a superposição das curvas obtidas pelas diferentes formulações.

$$u_e^{ni}(T_v') = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1,3,5} \frac{16}{n^3\pi^3}\frac{\sigma_0}{T_c'}\left[1+\frac{2(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n\pi}\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi Z}{2}\right)\left[1-e^{\left(-\frac{n^2\pi^2 T_v'}{4}\right)}\right] & (6a) \\ \displaystyle\sum_{n=1,3,5} \frac{16}{n^3\pi^3}\frac{\sigma_0}{T_c'}\left[1+\frac{2(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n\pi}\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi Z}{2}\right)\left[e^{\left(\frac{n^2\pi^2 T_c'}{4}\right)}-1\right]e^{\left(-\frac{n^2\pi^2 T_v'}{4}\right)} & (6b) \end{cases}$$

$$U_v^{ni}(T_v') = \begin{cases} \dfrac{T_v'}{T_c'}\left\{1-\dfrac{64}{T_v'}\displaystyle\sum_{n=1,3,5}\frac{1}{n^4\pi^4}\left[1+\frac{2(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n\pi}\right]\left[1-e^{\left(-\frac{n^2\pi^2 T_v'}{4}\right)}\right]\right\} & (7a) \\ 1-\dfrac{1}{T_c'}\displaystyle\sum_{n=1,3,5}\frac{64}{n^4\pi^4}\left[1+\frac{2(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n\pi}\right]\left[e^{\left(\frac{n^2\pi^2 T_c'}{4}\right)}-1\right]e^{\left(-\frac{n^2\pi^2 T_v'}{4}\right)} & (7b) \end{cases}$$

$$u_e^{ni}(Z,T_v') = v(Z,T_v') + \psi(Z) \quad (8)$$

$$v(T_v') = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1,3,5} -\frac{16}{n^3\pi^3}\frac{\sigma_0}{T_c'}\left[1+\frac{2(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n\pi}\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi Z}{2}\right)\left[1-e^{\left(-\frac{n^2\pi^2 T_v'}{4}\right)}\right] & (9a) \\ \displaystyle\sum_{n=1,3,5} \frac{16}{n^3\pi^3}\frac{\sigma_0}{T_c'}\left[1+\frac{2(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n\pi}\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi Z}{2}\right)\left[e^{\left(\frac{n^2\pi^2 T_c'}{4}\right)}-1\right]e^{\left(-\frac{n^2\pi^2 T_v'}{4}\right)} & (9b) \end{cases}$$

$$\psi = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0}{T_c'}\left(\dfrac{1}{6}Z^3-\dfrac{1}{2}Z^2+\dfrac{1}{2}Z\right) & (10a) \\ 0 & (10b) \end{cases}$$

$$U_v^{ni}(T_v') = \begin{cases} \dfrac{T_v'}{T_c'}\left\{1+\dfrac{1}{T_v'}\left[\displaystyle\sum_{n=1,3,5}\frac{64}{n^4\pi^4}\left(1+\frac{2(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n\pi}\right)e^{\left(-\frac{n^2\pi^2 T_v'}{4}\right)}-\frac{3}{12}\right]\right\} & (11a) \\ 1-\dfrac{1}{T_c'}\displaystyle\sum_{n=1,3,5}\frac{64}{n^4\pi^4}\left[1+\frac{2(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{n\pi}\right]\left[e^{\left(\frac{n^2\pi^2 T_c'}{4}\right)}-1\right]e^{\left(-\frac{n^2\pi^2 T_v'}{4}\right)} & (11b) \end{cases}$$

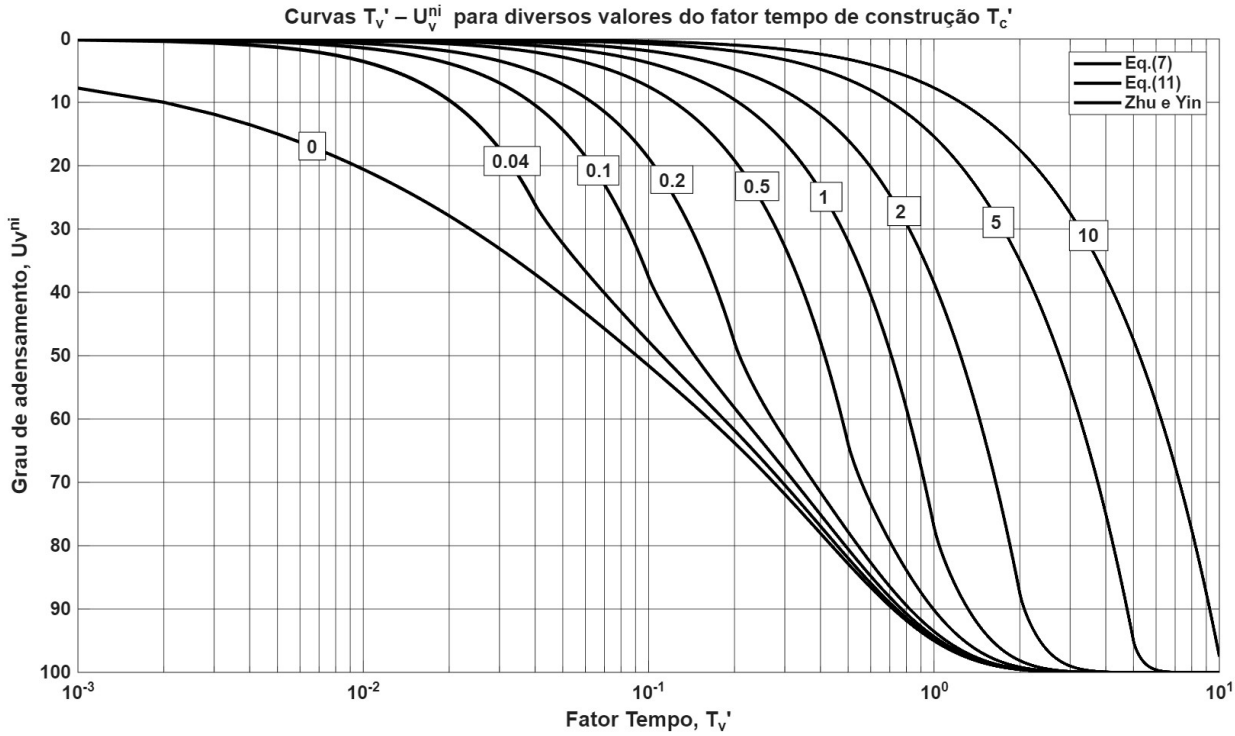


Figura 2. Curvas T_v' –U_v^{ni} para diversos valores do fator tempo de construção T_c' - base da camada em contorno permeável

2.2 Solução 2: Excesso inicial de poropressão linear com a profundidade e base da camada de argila em contorno impermeável

A segunda solução analítica mantém as condições de contorno previamente estabelecidas na Eq. (5). Entretanto, nesta formulação admite-se que cada incremento de carregamento produz uma distribuição triangular dos excessos de poropressão em uma camada de argila cuja base está situada junto a contorno impermeável (Figura 3). Adicionalmente, o incremento de tensão total vertical também é assumido variar linearmente com a profundidade e com o tempo, de acordo com a Eq. (12), tornando-se constante para $T_v' > T_c'$.

As Eqs. (13) e (14) fornecem, respectivamente, as expressões resultantes para os excessos de poropressão e para o grau médio de adensamento primário, nos estágios pré e pós-construção, obtidas pela aplicação da primeira metodologia. Em complemento, as Eqs. (15) a (18) apresentam as formulações correspondentes derivadas pela segunda abordagem.

A Fig. 4 compara, para diferentes valores de T_c', a evolução do grau médio de adensamento em função de T_v', calculado pelas Eqs. (14) e (18) e pela solução de Zhu & Yin (1998). Observa-se novamente a coincidência entre as diversas curvas, indicando a equivalência das equações propostas.

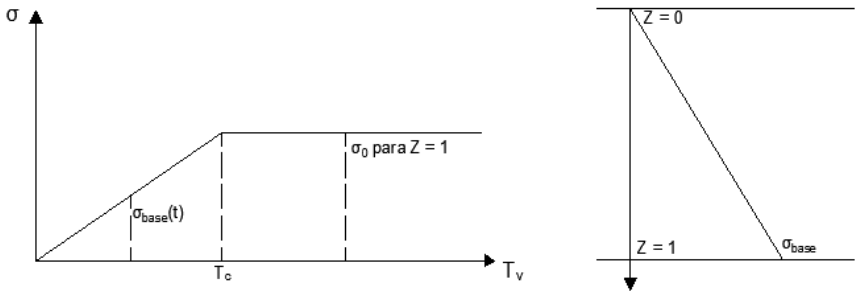


Figura 3. Variação da tensão total com a profundidade e o tempo – drenagem simples

$$\sigma_v = \sigma_0 Z \frac{T_v'}{T_c} \qquad T_v' \leq T_c' \tag{12}$$

$$u_e^{ni} = \sum_{n=1,3,5} -\frac{32}{n^4\pi^4}\frac{\sigma_0}{T_c'}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi Z}{2}\right)\left[1 - e^{\left(-\frac{n^2\pi^2 T_v'}{4}\right)}\right] \tag{13a}$$

$$\left(\sum_{n=1,3,5} -\frac{32}{n^4\pi^4}\frac{\sigma_0}{T_c'}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi Z}{2}\right)\left[e^{\left(\frac{n^2\pi^2 T_c'}{4}\right)} - 1\right]e^{\left(-\frac{n^2\pi^2 T_v'}{4}\right)}\right. \tag{13b}$$

$$U_v^{ni}(T_v') = \frac{T_v'}{T_c'}\left\{1 + \frac{128}{T_v'}\sum_{n=1,3,5}\frac{1}{n^5\pi^5}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\left[1 - e^{\left(\frac{-n^2\pi^2 T_v'}{4}\right)}\right]\right\} \tag{14a}$$

$$\left(1 + \frac{1}{T_c'}\sum_{n=1,3,5}\frac{128}{n^5\pi^5}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\left[e^{\left(\frac{n^2\pi^2 T_c'}{4}\right)} - 1\right]e^{\left(\frac{-n^2\pi^2 T_v'}{4}\right)}\right. \tag{14b}$$

$$u_e^{ni}(Z, T_v') = v(Z, T_v') + \psi(Z) \tag{15}$$

$$v(T_v') = \sum_{n=1,3,5}\frac{32}{n^4\pi^4}\frac{\sigma_0}{T_c'}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi Z}{2}\right)\left[1 - e^{\left(\frac{-n^2\pi^2 T_v'}{4}\right)}\right] \tag{16a}$$

$$\left(\sum_{n=1,3,5} -\frac{32}{n^4\pi^4}\frac{\sigma_0}{T_c'}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi Z}{2}\right)\left[e^{\left(\frac{n^2\pi^2 T_c'}{4}\right)} - 1\right]e^{\left(\frac{-n^2\pi^2 T_v'}{4}\right)}\right. \tag{16b}$$

$$\psi = \begin{cases}\frac{\sigma_0}{T_c'}\left(-\frac{1}{6}Z^3 + \frac{1}{2}Z\right) & \text{(17a)}\\ 0 & \text{(17b)}\end{cases}$$

$$U_v^{ni}(T_v') = \frac{T_v'}{T_c'}\left\{1 - \frac{1}{T_v'}\left[\sum_{n=1,3,5}\frac{128}{n^5\pi^5}(-1)^{\frac{n+1}{2}}e^{\left(\frac{-n^2\pi^2 T_v'}{4}\right)} + \frac{5}{12}\right]\right\} \tag{18a}$$

$$\left(1 + \frac{1}{T_c'}\sum_{n=1,3,5}\frac{128}{n^5\pi^5}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\left[e^{\left(\frac{n^2\pi^2 T_c'}{4}\right)} - 1\right]e^{\left(\frac{-n^2\pi^2 T_v'}{4}\right)}\right. \tag{18b}$$

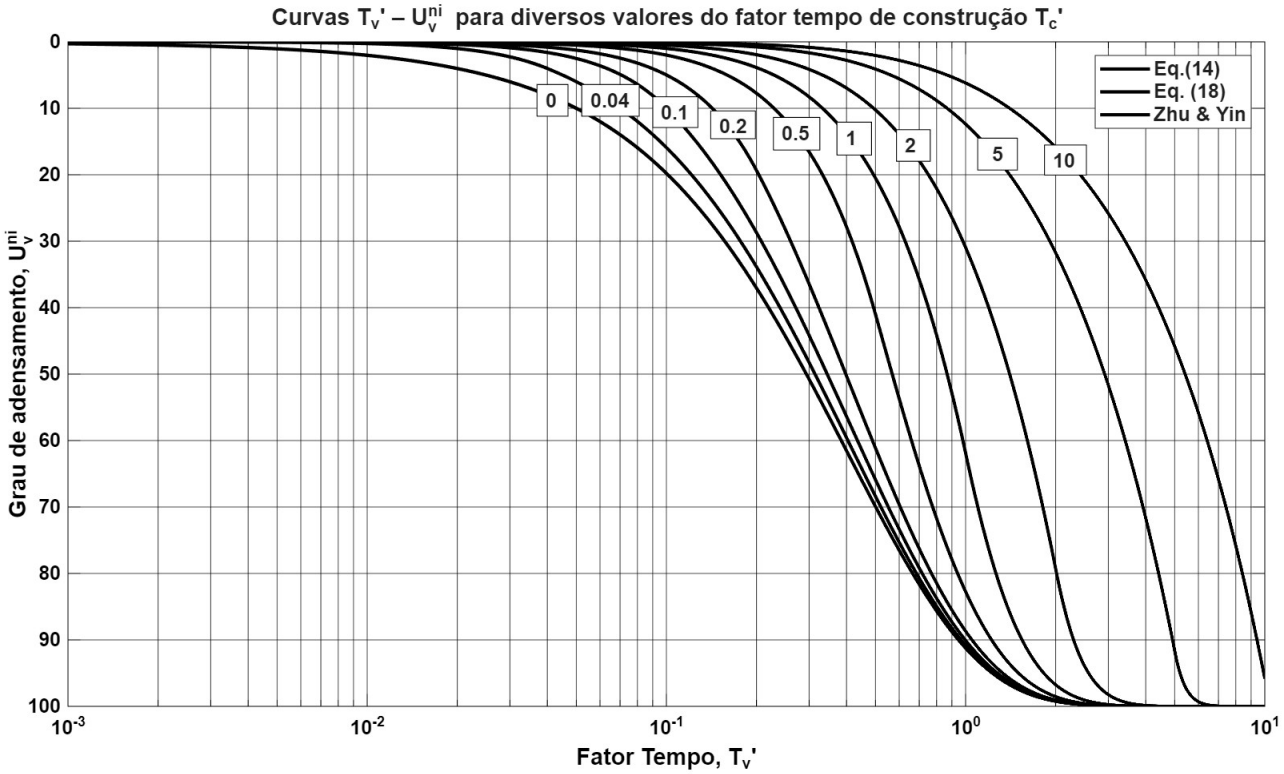


Figura 4. Curvas $T_v' - U_v^{ni}$ para diversos valores do fator tempo de construção T_c' - base da camada em contorno impermeável

3 CONCLUSÕES

Esse artigo apresentou soluções analíticas e gráficas para avaliar a evolução do grau médio de adensamento primário sob diferentes condições iniciais e de contorno, admitindo-se a variação linear do incremento de tensão total com a profundidade e com o tempo. Foram propostas formulações capazes de representar, entre outras aplicações, situações associadas ao rebaixamente rápido do nível do lençol freático e à construção de aterros hidráulicos sobre camadas de argila saturada.

A solução analítica da equação diferencial parcial não homogêna que governa o adensamento primário 1D sob carregamento em rampa foi obtida por duas abordagens analíticas: i) expansão de autofunções; ii) decomposição da solução em parcelas homogênea e particular, expressas como a soma de duas funções independentes. As equações assim obtidas foram comparadas com a solução de Zhu & Yin (1998), e os resultados evidenciaram concordância entre as formulações.

AGRADECIMENTO

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

LISTA DE SÍMBOLOS

c_v coeficiente de adensamento
H espessura da camada de argila
H_d máximo caminho de drenagem
m variável de contagem
M parâmetro de contagem normalizado
n variável de contagem
q_c máximo carregamento vertical ao final do tempo de construção

t_c duração do tempo de construção
t tempo
T_c fator tempo de construção considerando o máximo caminho de drenagem
T_c' fator tempo de construção considerando a espessura da camada de argila
T_v fator tempo considerando o máximo caminho de drenagem
T_v' fator tempo considerando a espessura da camada de argila
u_e^{ni} excesso de poropressão devido a carregamento não instantâneo
U_v^i grau médio de adensamento primário devido a carregamento instantâneo
U_v^{ni} grau médio de adensamento primário devido a carregamento não instantâneo
v solução homogênea
z profundidade de um ponto a partir do topo da camada de argila
Z profundidade adimensional
σ_v tensão vertical total
σ_0 tensão vertical total inicial
ψ solução complementar

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carneiro, R., Gerscovich, D., Danziger, B. (2021) *A simple approach to predict settlement due to constant rate loading in clays. Soil and Rocks*, 44(2), 151-158.

Conte, E., Troncone, A. (2006) *One-dimensional consolidation under general time-dependent loading. Canadian Geotechnical Journal*, 43(11), 1107-1116.

Hanna, D., Sivakugan, N., Lovisa, J. (2013) *Simple approach to consolidation due to constant rate loading in clays. International Journal of Geomechanics*, 13(2), 193-196.

Lovisa, J. (2012) *An insigth into time rate of consolidation*. PhD Thesis, James Cook University, Queensland, 187 p.

Olson, R. (1977) *Consolidation under time dependent loading*. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 103(1), 55-60.

Shiffman, R.L. (1958) *Consolidation of soil under time dependent loading and varying permeability*. *In Proceedings of the 37th Annual Meeting of the Highway Research Board*, 584-615.

Terzaghi, K. (1923) *Die berechnung der durchlassigkeitsziffer des tones aus dem verlauf der hydro-dynamischen spannungserscheinungen*. *Sitzungberichte Akademie der Wissenschaften*, 132, 125-138.

Terzaghi, K. (1925) *Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer grundlage*. *Franz Deuticke*, Vienna, Austria.

Terzaghi, K. (1943) *Theoretical soil mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 528 p.

Zhu, G., Yin, J. (1998) *Consolidation of soil under depth-dependent ramp load*. *Canadian Geotechnical Journal*, 35(2), 344-350.