XXII Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Engenharia Geotécnica
XI Simpósio Brasileiro de Engenheiros Geotécnicos Jovens
24 a 28 de agosto de 2026 – Brasília/DF
DOI: 10.47094/COBRAMSEG2026.5/99

Uma Avaliação do Modelo Hiperbólico para Dois Tipos de Solos, com Diferentes Compacidades

Willians Perlley Alexandre da Silva
Doutorando / Engenheiro Pesquisador, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro/RJ, Brasil, willians.perlley@coc.ufrj.br

Gustavo Santos Domingos
Professor Assistente, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro/RJ, Brasil, gustavodom@coc.ufrj.br

Francisco de Rezende Lopes
Professor Titular, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro/RJ, Brasil, flopes@coc.ufrj.br

RESUMO: O Modelo Hiperbólico foi o primeiro modelo constitutivo de comportamento não linear dos solos para uso em análises pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Proposto por Duncan e colaboradores no final da década de 1960 (Duncan e Chang, 1970), o modelo incorpora as principais características do comportamento tensão-deformação-resistência dos solos e é amplamente utilizado na prática, especialmente em análises na condição de serviço, quando apenas parte do maciço atinge a ruptura. Posteriormente, por volta dos anos 2000, foi desenvolvida uma variação, chamada *Hardening Soil* (Shanz *et al*., 1999), fundamentado no Modelo Hiperbólico, mas incorporando alguns conceitos de plasticidade, passando a ser empregado em softwares comerciais recentes do MEF. O presente trabalho apresenta a interpretação de resultados de ensaios triaxiais drenados realizados em dois solos distintos: uma areia de praia e um solo residual compactado destinado à execução do núcleo de uma barragem de terra. Os ajustes obtidos com ambos os modelos são analisados e discutidos quanto à sua capacidade de representar adequadamente o comportamento tensão–deformação-resistência desses materiais.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem de solos, Modelo hiperbólico, Ensaios Triaxiais, Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT: The Hyperbolic Model was the first constitutive model to represent the nonlinear behavior of soils for use in Finite Element Method (FEM) analyses. Proposed by Duncan and collaborators in the late 1960s (Duncan and Chang, 1970), the model incorporates the main features of the stress-strain-strength behavior of soils and is widely used in practice, especially in working or service conditions, when only part of the soil mass reaches failure. Later, around the 2000s, a variation called *Hardening Soil* (Shanz *et al.*, 1999) was proposed, based on the Hyperbolic Model but incorporating some concepts of plasticity, and became widely used in more recent commercial FEM softwares. The present study presents the interpretation of drained triaxial test results performed on two distinct soils: a beach sand and a compacted residual soil intended for the core of an earth dam. The fittings obtained with both models are analyzed and discussed regarding their ability to adequately represent the stress-strain-strength behavior of these materials.

KEYWORDS: Soil modelling, Hyperbolic model, Triaxial tests, Finite Element Method.

1. INTRODUÇÃO

O Modelo Hiperbólico (doravante denominado *Hb*) foi o primeiro modelo de comportamento não linear dos solos para análise pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Proposto por Duncan e colaboradores no final dos anos 1960 (Duncan e Chang, 1970), ele incorpora as principais feições do comportamento dos solos: (i) redução da rigidez com o aumento da tensão cisalhante, (ii) aumento da rigidez com o aumento da tensão confinante e (iii) mudança de comportamento em descarregamento/recarregamento – o que permite considerar o histórico das tensões aplicadas. Apesar da idade, e do aparecimento de modelos mais sofisticados posteriormente, esse modelo ainda é muito utilizado na prática, especialmente em situações em que apenas

parte do meio atinge ruptura, como na análise das condições de serviço. Uma qualidade do modelo é exigir um número relativamente pequeno de parâmetros, para os quais há muita experiência e valores típicos publicados. O modelo recebeu algumas contribuições ao longo do tempo, como a variante *Hardening Soil* (doravante denominada *HS*), que foi incorporada na maioria dos programas do MEF.

Importante lembrar que os modelos elásticos requerem um par de parâmetros, que podem ser E (Módulo de Young) e ν (Coeficiente de Poisson) ou E e B (Módulo Volumétrico ou *Bulk Modulus*) ou G (Módulo Cisalhante ou *Shear Modulus*) e B, etc. No caso de comportamento linear, esses parâmetros têm um valor único, e no caso de comportamento não linear, têm uma função para cada parâmetro.

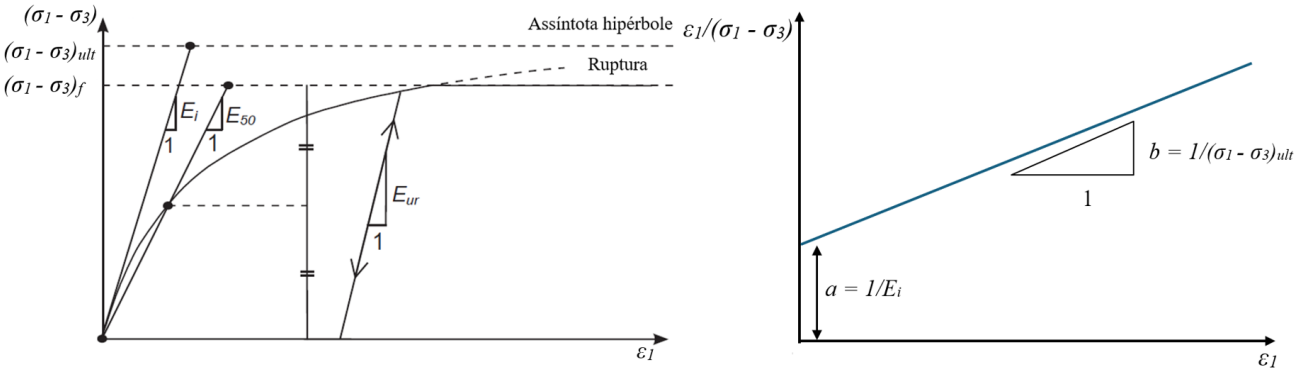
O presente trabalho se propõe a interpretar os resultados de ensaios triaxiais (drenados) em dois solos, de acordo com os modelos *Hb* e *HS*. Os solos são uma areia de praia, em duas compacidades diferentes, e um solo residual compactado para barragem. A qualidade dos ajustes dos modelos aos resultados dos ensaios avaliados é discutida, bem como são comparados os parâmetros obtidos com valores típicos disponíveis na literatura.

2. O MODELO HIPERBÓLICO

2.1 O Modelo Original de Duncan e Chang

No *Hb,* proposto por Duncan e Chang (1970), o Módulo de Young, E, varia com o nível de tensão cisalhante (devendo ser nulo quando essa se iguala à resistência), e com o nível de tensão confinante, além de diferir nas condições descarregamento-recarregamento, questão que não será tratada neste trabalho. Para a dependência do nível de tensão cisalhante, o modelo se baseia no trabalho de Kondner (1963), segundo o qual a maioria das curvas tensão-deformação dos solos segue uma hipérbole, expressa pela equação (ver Figura 1):

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\varepsilon_1}{a + b\varepsilon_1} \tag{1}$$



(a) (b)

Figura 1. (a) Curva tensão-deformação do solo, representada por uma hipérbole, e (b) determinação dos coeficientes a e b.

O Módulo de Young tangente (E_t) à hipérbole é obtido pela sua derivada em relação à deformação:

$$E_t = \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_1} = \frac{a}{(a + b\varepsilon_1)^2} \tag{2}$$

Explicitando a deformação axial em função do acréscimo de tensão, tem-se:

$$E_t = \frac{1}{a}\left[1 - b(\sigma_1 - \sigma_3)\right]^2 \tag{3}$$

Como (Figura 1b) $1/a = E_i$, o módulo inicial, e $b = 1/(\sigma_1-\sigma_3)_{ult}$, tem-se:

$$E_t = E_i\left[1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}\right]^2 \quad (4a)$$

Ou, caso a assíntota da hipérbole não coincida com o patamar da curva tensão-deformação,

$$E_t = E_i\left[1 - R_f \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}\right]^2 \quad (4b)$$

onde R_f é a razão entre o patamar da curva (resistência) e a assíntota da hipérbole, razão esta obtida como mostrado na Figura 1. Para a dependência do nível de tensão confinante, Duncan e Chang utilizaram a expressão de Janbu (1963):

$$E_i = K\, p_{atm}\left(\frac{\sigma_3'}{p_{atm}}\right)^n \quad (5)$$

onde σ'_3 é a tensão confinante (efetiva) no ensaio triaxial, K e n são parâmetros determinados experimentalmente no plano E_i/p_{atm} versus σ'_3/p_{atm}, onde, p_{atm} é a pressão atmosférica, adotada como tensão de referência.

Duncan e Chang (1970) propuseram ainda que, no caso de ocorrer descarregamento ou recarregamento, o comportamento seja considerado elástico linear, mais rígido, adotando-se um módulo de descarregamento-recarregamento, E_{ur}, ao invés do E_t, dado por:

$$E_{ur} = K_{ur}\, p_{atm}\left(\frac{\sigma_3'}{p_{atm}}\right)^n \quad (6)$$

onde K_{ur} é o fator K da Equação (5), porém obtido em condição de descarregamento-recarregamento. Assim, é possível considerar a *história das tensões* ou a irreversibilidade de deformações num modelo elástico não-linear.

Para completar o par de parâmetros elásticos, tem sido usado o Coeficiente de Poisson ν, com função dada, por exemplo, por Kulhawy *et al.* (1969), ou o Módulo Volumétrico B, com função dada por Duncan *et al.* (1980). Esses parâmetros não serão tratados neste trabalho, bem como o comportamento em descarregamento/recarregamento.

2.2 O Modelo *Hardening Soil*

Shanz *et al.* (1999) apresentam uma variação do *Hb* chamada *Hardening Soil* (*HS*) implementada no programa Plaxis (2002). A função hiperbólica também é utilizada nesse modelo, porém, o parâmetro de referência é o módulo de elasticidade secante a 50% da tensão desviadora na ruptura, E_{50}. Com isso, o módulo de elasticidade tangente inicial é obtido pela Equação (7). O enrijecimento do solo com o aumento da tensão confinante também é considerado por uma função exponencial (8), semelhante ao proposto por Duncan e Chang (1970).

$$E_i = \frac{2\,E_{50}}{2 - R_f} \quad (7)$$

$$E_{50} = E_{50}^{ref}\left(\frac{c\cos(\varphi) - \sigma'_3 sen(\varphi)}{c\cos(\varphi) - p^{ref} sen(\varphi)}\right)^m \quad (8)$$

Na Equação (8), E_{50}^{ref} é o módulo secante a 50% da tensão desviadora na ruptura para a pressão de referência, p^{ref}, em geral, a pressão atmosférica.

As expressões que definem a tensão desviadora de ruptura e a partir dela a assíntota da curva de tensão-deformação são as mesmas já apresentadas no modelo de Duncan e Chang. No *HS*, as deformações de carregamentos virgens são consideradas como plásticas, ou seja, ao se descarregar, as deformações não são totalmente recuperadas. Para descarregamento e recarregamento, o modelo conta com uma outra formulação e outros parâmetros e considera um comportamento perfeitamente elástico baseado nas relações de Hooke:

$$E_{ur} = E_{ur}^{ref} \left(\frac{c\cos(\varphi) - \sigma'_3 sen(\varphi)}{c\cos(\varphi) - p^{ref} sen(\varphi)} \right)^m \quad (9)$$

onde E_{ur} é o Módulo de Young para descarga e recarga.

Para caracterizar a deformabilidade, o modelo *HS* utiliza, como segundo parâmetro elástico, o módulo oedométrico, considerando variando com o estado de tensões segundo uma função exponencial com o mesmo expoente *m*:

$$E_{oed} = E_{oed}^{ref} \left(\frac{c\cos(\varphi) - \sigma'_3 sen(\varphi)}{c\cos(\varphi) - p^{ref} sen(\varphi)} \right)^m \quad (10)$$

onde E_{oed}^{ref} é o módulo tangente no ensaio oedométrico. O modelo *HS* pede o Coeficiente de Poisson apenas para modelar a rigidez em descarregamento/recarregamento, como ν_{ur}.

3. SOLOS ANALISADOS

Na presente avaliação do modelo hiperbólico foram analisados 3 conjuntos de ensaios triaxiais drenados CID (*Consolidated Isotropic Drained*), sendo um conjunto de um solo argiloso compactado e dois outros de uma areia de praia.

O primeiro conjunto de ensaios triaxiais foi obtido de um solo utilizado no núcleo da *Barragem de Serra da Mesa* (SRM), conforme resultados apresentados por Castro (1996). O material é proveniente de áreas de empréstimo localizadas às margens do Rio Tocantins, consistindo em uma mistura de solos coluvionares e residuais maduros de rocha granítica. Foi caracterizado como uma argila arenosa bem graduada, de coloração marrom-avermelhada e plasticidade média, com Limite de Liquidez de 42%, Limite de Plasticidade de 18% e classificação USCS (*Unified Soil Classification System*) como CL. O solo foi compactado a 100% do Proctor Normal, com umidade ótima de aproximadamente 15%, apresentando peso específico seco de 18 kN/m^3, e foi submetido, nos ensaios, a tensões de adensamento de 100, 300, 500 e 800 kPa.

O segundo e terceiro conjuntos de ensaios triaxiais CID foram obtidos da *Areia da Praia de Ipanema* (IPA), estudada na última década quanto às suas características de resistência (Coutinho, 2021; Domingos, 2022), de permeabilidade (Costa, 2020; Soares, 2021; Simões, 2024), e o comportamento dependente do tempo, como "*creep*" e envelhecimento ou "*aging*" (Domingos, 2022). Trata-se de uma areia quartzosa, de grãos sub arredondados a sub angulares, de granulometria média (D_{50} = 0,35 mm; CU = 1,92; CC = 1,06), classificação USCS como SP. Foram avaliados 4 ensaios na condição medianamente compacta (49 ≤ *Dr* (%) ≤ 57) e outros 4 ensaios na condição compacta (89 ≤ *Dr* (%) ≤ 93), na mesma sequência de tensões de adensamento: 50, 100, 200 e 400 kPa.

4. OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS E AJUSTES

Os parâmetros de resistência (c' e ϕ') foram obtidos a partir dos resultados dos ensaios triaxiais de cada conjunto, conforme apresentados por Castro (1996) e Domingos (2022). Para a avaliação do Módulo de Young, são planilhados os dados de tensão desviadora (σ_1 - σ_3) e de deformação axial (ε_1) de cada ensaio. Posteriormente, são elaborados os gráficos $\varepsilon_1/(\sigma_1 - \sigma_3)$ versus ε_1 para obtenção dos coeficientes *a* e *b* da hipérbole, como exemplificado na Figura 2a com os ensaios de Serra da Mesa, que vão indicar E_i e R_f no *Hb*, bem como de E_{50} e R_f para o *HS*. Destaca-se que, para as amostras da Areia da Praia de Ipanema, os valores de E_{50} foram obtidos diretamente do gráfico tensão-deformação de cada ensaio.

A etapa seguinte consistiu na obtenção dos parâmetros K e n, por meio da interpretação do gráfico E_i/p_{atm} versus σ'_3/p_{atm} (Figura 2b), e na obtenção do expoente m para o modelo *HS* no plano $\ln(E_{50})$ versus $\ln(X)$, com X sendo definido na Figura 2c. O Coeficiente de Poisson foi determinado pela razão entre as deformações específicas radial e axial, sendo a deformação específica radial calculada a partir da deformação volumétrica e axial. Para efeito deste trabalho, foram consideradas as médias dos valores calculados para o Coeficiente de Poisson até que este atingisse o valor de 0,50, que seria o limite de um comportamento elástico. Um resumo dos parâmetros obtidos para cada conjunto de ensaios é apresentado na Tabela 1.

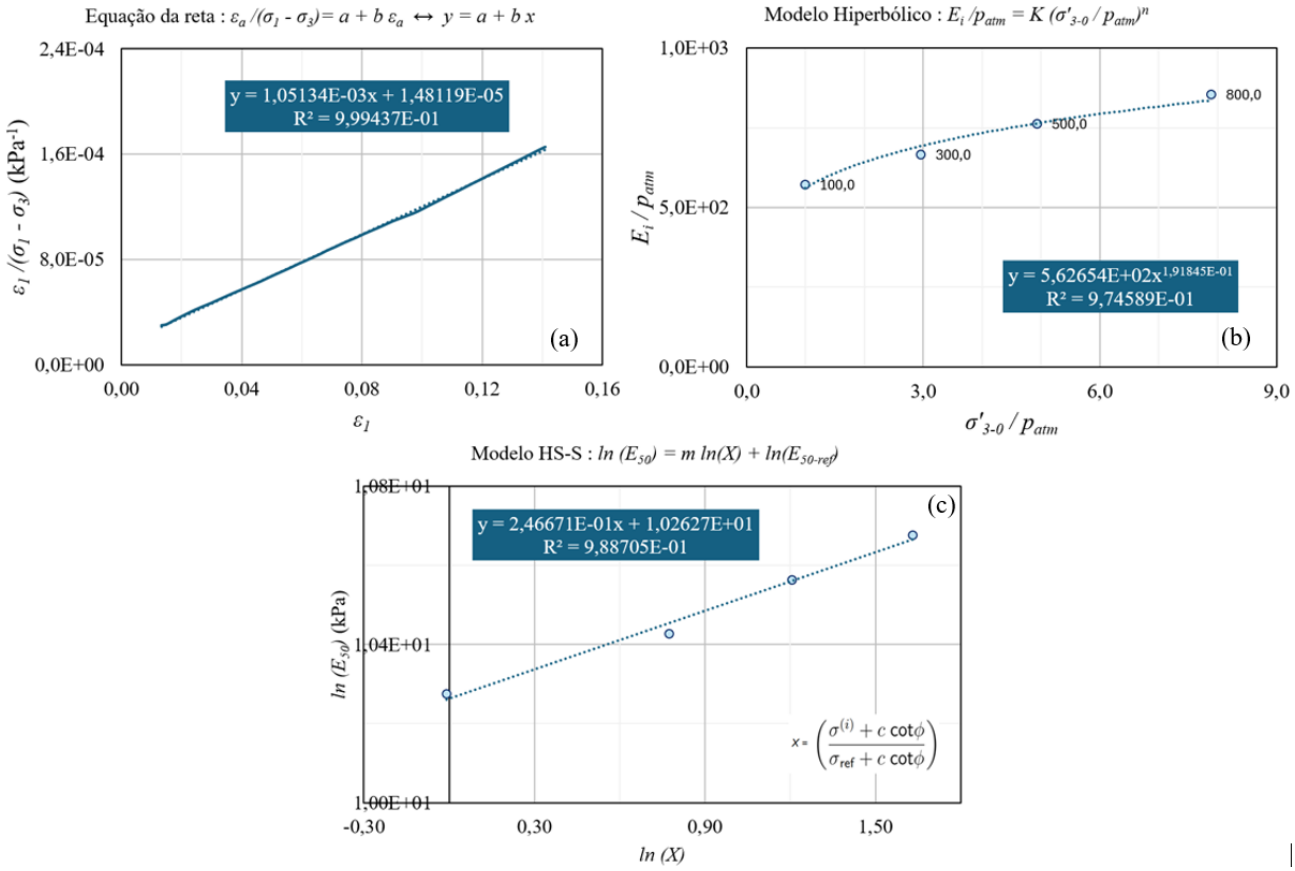


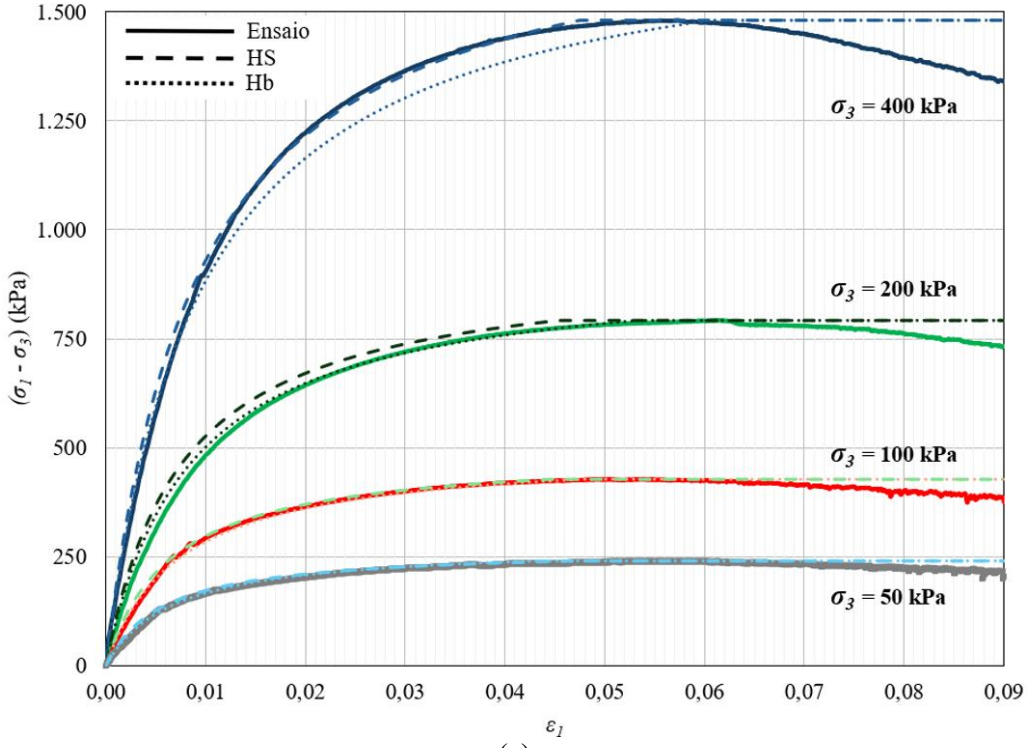
Figura 2. Determinação dos parâmetros para os modelos *Hb* e *HS*: (a) coeficientes a e b, (b) n e K no plano E_i/p_{atm} versus $\sigma'_3/p_{atm,}$ e (c) m no plano $\ln(E_{50})$ versus $\ln(X)$.

Tabela 1. Resumo dos parâmetros obtidos para o modelo hiperbólico.

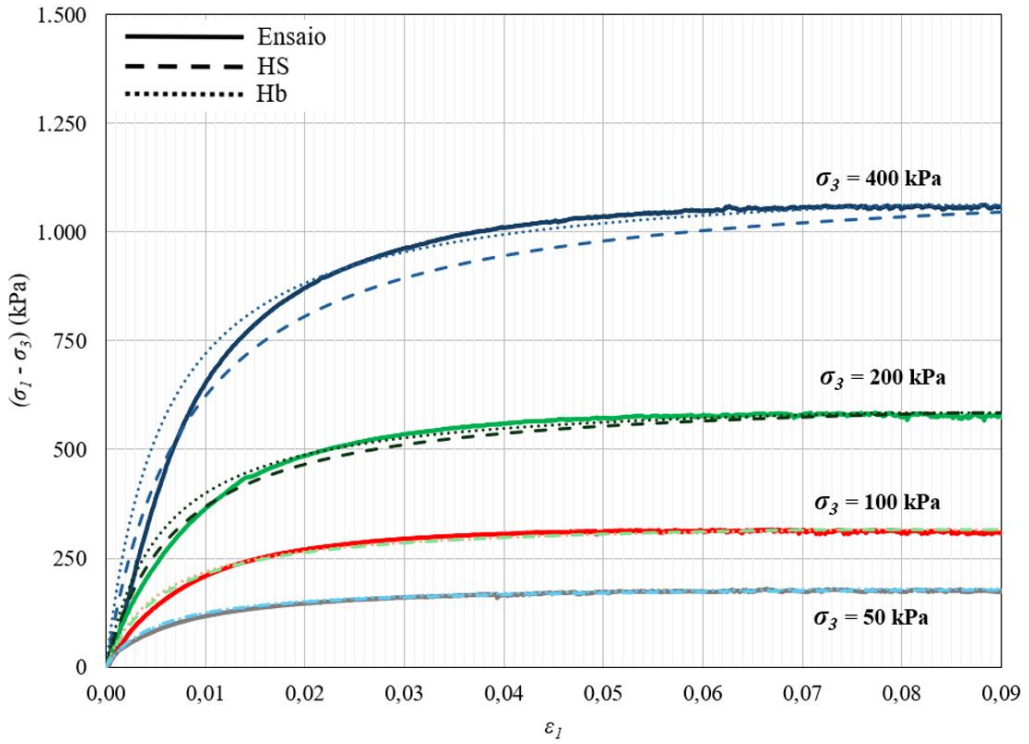
Material*	e_0	***Dr* (%)**	***c'* (kPa)**	***ϕ'* (°)**	R_f	***K***	***n***	***v***	E_{50}^{ref} **(kPa)**	***m***
SRM	0,505	97,7	45,1	33,3°	0,89	563	0,20	0,30	28.974	0,25
IPA-M	0,597	52,0	0,0	36,3°	0,93	601	0,85	0,42	28.054	0,65
IPA-C	0,476	92,1	0,0	42,0°	0,87	676	0,71	0,41	38.526	0,68

***SRM** (Serra da Mesa); **IPA** (Areia da Praia de Ipanema): **M** medianamente compacta e **C** compacta.

Ressalta-se que, no ajuste da hipérbole (Figura 2), foram descartados os primeiros pontos, conforme recomendação de Duncan *et al.* (1980). As Figuras 3 e 4 apresentam a comparação entre os resultados experimentais e as previsões de cada modelo para cada tensão confinante.



(a)



(b)

Figura 3. Ensaios na Areia da Praia de Ipanema (IPA), curvas medidas e previstas pelos modelos, para duas compacidades: (a) compacta e (b) medianamente compacta.

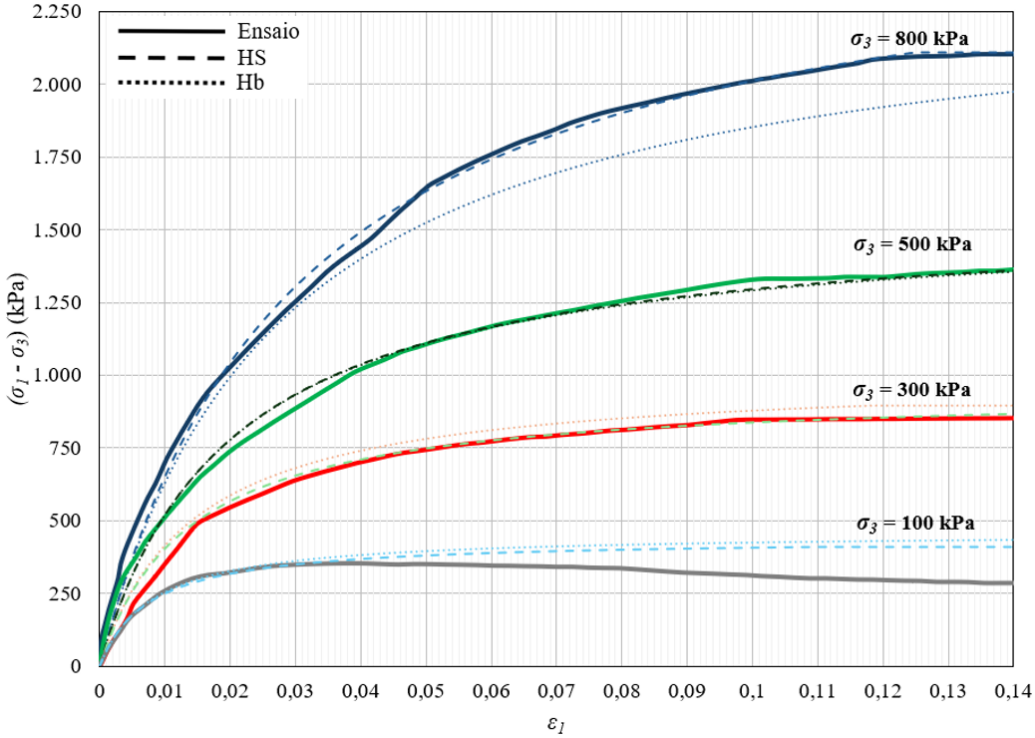


Figura 4. Ensaios do núcleo da Barragem de Serra da Mesa (SRM), curvas medidas e previstas.

5. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

No que se refere aos parâmetros obtidos (Tabela 1), observa-se que, no caso do *Hb*, os valores estão em consonância com aqueles típicos reportados por Duncan *et al*. (1980). Os baixos valores do parâmetro *n* para as amostras SRM indicam uma menor dependência da rigidez em relação à tensão confinante, o que pode estar associado ao fato de se tratar de um material compactado, com efeito similar a um sobreadensamento. Isto também se observa nos valores do parâmetro *m* do *HS*, que foram inferiores aos obtidos das amostras IPA-M e IPA-C. Estes resultados sugerem menor dependência das tensões confinantes no caso do material compactado, enquanto os maiores valores de *m* obtidos para IPA-M e IPA-C indicam maior dependência, coerente com amostras que foram reconstituídas, adensadas, e não sofreram descarregamento (condição normalmente adensada). De modo geral, os valores de *m* encontrados na literatura técnica são compatíveis com aqueles obtidos neste estudo (Obrzud e Truty, 2025, reportam valores de *m* entre 0,3 e 0,9).

Em relação ao parâmetro R_f, foram obtidos valores da ordem de 0,90 para ambos os materiais, em concordância com o que é usualmente reportado na literatura técnica (p.ex., Duncan *et al.*, 1980; Selig, 1988). Os valores de E^{ref}_{50} determinados para o material SRM e para IPA-M mostraram-se semelhantes; entretanto, verificou-se que a amostra IPA-C apresentou rigidez aproximadamente 35% superior, evidenciando o efeito direto da compacidade no aumento da rigidez. Essa tendência também é coerente com a redução do parâmetro *n* em relação às amostras IPA-M e IPA-C.

Comparando as curvas tensão-deformação dos ensaios triaxiais com aquelas previstas pelos modelos, para as amostras IPA, os melhores ajustes ocorreram para tensões confinantes de até 200 kPa. Nos ensaios com tensão confinante de 400 kPa, no caso da IPA-C (Figura 3a), o modelo *Hb* apresentou ajuste adequado até deformações axiais da ordem de 1%, enquanto o *HS* manteve boa concordância até a tensão desviadora máxima. Já para a IPA-M (Figura 3b), sob a mesma tensão confinante, o *HS* apresentou um melhor ajuste em relação ao *Hb* até deformações próximas de 1%. Comportamento semelhante foi observado para as amostras SRM (Figura 4). Para a maior tensão confinante analisada, igual a 800 kPa, embora o *HS* tenha proporcionado o melhor ajuste global, o modelo hiperbólico apresentou resultados bastante próximos até deformações da ordem de 1%.

De modo geral, ambos os modelos se mostraram capazes de reproduzir adequadamente as curvas experimentais para pequenas deformações, até cerca de 1% de deformação axial. As maiores discrepâncias foram observadas nas análises sob maiores tensões confinantes, 400 kPa para as amostras IPA e 800 kPa para

as amostras SRM, refletindo limitações inerentes do processo de ajuste dos modelos em elevados níveis de tensão confinante, sem necessariamente indicar alterações nas propriedades das amostras durante os ensaios (não havendo quebra de grãos, ou mudança de drenagem). Os melhores ajustes de ambos os modelos ocorreram para tensões confinantes próximas à tensão de referência adotada, igual a 100 kPa, tanto em relação ao tipo de material quanto ao grau de compacidade, particularmente no caso das amostras IPA. Tal resultado reforça a importância da escolha adequada da tensão de referência na calibração dos parâmetros constitutivos.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho apresentou a interpretação de ensaios triaxiais do tipo CID em dois solos de naturezas distintas e diferentes estados de compacidade, a partir das formulações dos modelos hiperbólicos *Hb* e *HS*. Observou-se que ambas as abordagens foram capazes de reproduzir satisfatoriamente os resultados experimentais, especialmente em níveis de pequenas deformações, associados às condições de serviço. Os parâmetros obtidos mostraram-se consistentes com valores típicos da literatura técnica, evidenciando que materiais compactados, como do núcleo da barragem de Serra da Mesa (SRM), apresentam menor dependência da rigidez em relação à tensão confinante, quando comparados a materiais reconstituídos e normalmente adensados, como no caso da Areia da Praia de Ipanema (IPA-M e IPA-C). O aumento da compacidade elevou a rigidez secante em aproximadamente 35%, mostrando o efeito do grau de compacidade. Embora ambos os modelos apresentem boa aderência em tensões próximas à de referência (100 kPa), o *HS* demonstrou desempenho superior sob elevados níveis de confinamento (400 kPa e 800 kPa).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Castro, C.H. (1996) Comportamento da Barragem de Serra da Mesa durante o período de construção. Dissertação de M.Sc., PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ.

Costa, R.C. (2020) Ensaios de Caracterização e de Permeabilidade na Areia da Praia de Ipanema, RJ. Dissertação de M.Sc., PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ.

Coutinho, J.V.M. (2021) Ensaios de Cisalhamento Direto na Areia da Praia de Ipanema, RJ. Dissertação de M.Sc., PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ.

Domingos, G.S. (2022) Estudo do Creep Não Drenado da Areia da Praia de Ipanema sob Condição Hidrostática. Tese de D.Sc., COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.

Duncan, J.M., and Chang, C.Y. (1970) Nonlinear analysis of stress and strain in soils. J.S.M.F.D., ASCE, vol. 96, no. SM5 (September), pp. 1629-1653.

Duncan, J.M., Byrne, P., Wong, K.S., Mabry, P. (1980) Strength, stress-strain and bulk modulus parameters for finite element analyses of stresses and movements in soils masses. Geotechnical Engineering Research Report n° UCB/GT/80-01, University of California, Berkeley.

Janbu, N. (1963) Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial tests. Proceedings, European C.S.M.F.E., Wiesbaden, vol. 1, pp. 19-25.

Kondner, R.L. (1963) Hyperbolic Stress-Strain Response: Cohesive Soils. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, 89, 115-143.

Kulhawy, F.H., Duncan, J.M., and Seed, H.B. (1969) Finite Element Analyses of Stresses and Movements in Embankments during Construction, *Report no. TE 69-4*, University of California, Berkeley.

Obrzud, R., Truty, A. (2025) The Hardening Soil Model: A Practical Guidebook. Zace Services.

Selig, E.T. (1988) Soil parameters for design of buried pipelines. In: Proceedings of the Pipeline Infrastructure Conference, Reston, pp. 99-116.

Shanz, T., Vermeer, P.A., Bonnier, P.G. (1999) The Hardening Soil Model: formulation and verification. Beyond 2000 in Computational Geotechnics, 1st. Ed., pp. 281-296.

Simões, F.B. (2024) Ensaios de Permeabilidade da Areia da Praia de Ipanema e de um Arranjo de Microesferas de Vidro. Dissertação de M.Sc., COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.

Soares, B.R. (2021) Ensaios de Permeabilidade na Areia da Praia de Ipanema e em uma Amostra de Microesferas de Vidro. Dissertação de M.Sc., PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ.