

DOI: 10.47094/COBRAMSEG2024/226

# Lógica *fuzzy* e análise probabilística aplicada a estabilidade de talude

Abraham Augusto Barbosa Gadelha

Doutorando, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), abraham\_augusto@hotmail.com

Milena Cristina Rocha de Souza

Mestre, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Campina Grande, Brasil, engmilenaacsouza@gmail.com

Carina Silvani

Professora adjunta, Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), Campina Grande, Brasil, carina.silvani@professor.ufcg.edu.br

**RESUMO:** A análise de estabilidade de talude, objetivando o monitoramento de áreas de risco, é um tema de grande interesse e de incertezas de dados para a engenharia geotécnica. O monitoramento dessas estruturas requer instrumentação, ensaios e pesquisas contínuas, em virtude dos múltiplos cenários existentes a serem determinados. Neste estudo foram aplicados dois métodos para detectar a possibilidade de deslizamento de um talude. O primeiro envolveu a realização de uma abordagem probabilística, a qual considera a análise de múltiplas superfícies de deslizamento, utilizando-se do software Slide da Rocscience, através de uma simulação Monte Carlo com um número inicial de mil iterações. O segundo método utilizou-se da aplicação da lógica *fuzzy* executada por meio da linguagem python, empregando como variáveis: peso específico, intercepto coesivo e ângulo de atrito, para apenas uma superfície de deslizamento, sendo obtidos os valores de fator de segurança definidos como críticos. O sistema de inferência aplicado é o de Mamdani. Foram determinadas 16 regras e 9 variáveis linguísticas, sendo 5 para o antecedente e 4 para o consequente. Os resultados demonstraram que o modelo tem tendência a subestimar os valores obtidos.

**PALAVRAS-CHAVE:** lógica *fuzzy*, análise probabilística, Monte Carlo, estabilidade de talude, incertezas

**ABSTRACT:** Slope stability analysis, focusing on the continuous monitoring of high-risk areas, is a subject of interest and data uncertainty for geotechnical engineering. Monitoring these structures requires instrumentation, testing, and an elevated level of research because of the multiple existing scenarios to be determined. In this study, we've applied two methods to detect the possibility of slope sliding. The first utilized is the probabilistic approach, which considered the analysis of multiple sliding surfaces, using Rocscience's software Slide, through a Monte Carlo simulation with an initial number of one thousand iterations. The second method uses the application of fuzzy logic executed through the Python language, using as variables specific weight, cohesion, and friction angle, for a given number of possible sliding surfaces, obtaining the values of the factor of security defined as critical. The inference system applied is that of Mamdani. A Total of 16 rules and 9 linguistic variables were adopted, 5 for the antecedent and 4 for the consequent. The results demonstrated that the model tends to underestimate the values obtained.

**KEYWORDS:** fuzzy logic, probabilistic analysis, Monte Carlo, slope stability, uncertainties

## 1 INTRODUÇÃO

A incerteza nos dados em análise de estabilidade é resultado de diversos fatores, segundo Nadim (2007) dentre os fatores existentes estão os resultantes da aleatoriedade encontrada, representada pela variabilidade natural

das propriedades do solo nas suas camadas adjacentes, e fatores fruto do pouco conhecimento dos parâmetros geotécnicos do solo, limitado por erros de aferição e da variabilidade das amostras.

No contexto descrito, uma análise determinística de resultados pode significar um cenário que não é adequado ao que pode ser a realidade presente do solo avaliado. Numa forma de mensurar mais apropriadamente surgem outras abordagens, como análise probabilística, lógica fuzzy, redes neurais, etc. As técnicas mencionadas utilizam ferramentas que visam a representação de um maior número de cenários e avaliação a influência dessas incertezas a respeito dos parâmetros do solo.

A análise aplicada com lógica *fuzzy* em geotecnia tem como um dos seus precursores Kacewicz (1987) que modelou o fator de segurança (FS) através do método de Fellenius e Bishop como um número *fuzzy*. No trabalho de Kacewicz (1987) a incerteza do FS é relação direta entre os valores dos conjuntos de coesão, peso específico e ângulo de atrito. Outros autores Silva *et al* (2011) modelaram outras variáveis como a drenagem, ângulo de atrito, inclinação do talude, dentro de sua abordagem.

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 Análise probabilística

A análise probabilística objetiva encontrar a definição de um valor crítico para o Fator de Segurança (FS) que determina uma Probabilidade de ruptura ( $P_r$ ), sendo assim a análise não se baseia num valor de FS que representaria somente um cenário dentre diversos possíveis. O valor de FS não define um critério único para a ruptura e o valor de  $P_r$  é utilizado como requisito em conjunto. A diferença entre análise determinística e probabilística é apresentada graficamente na Figura 1.

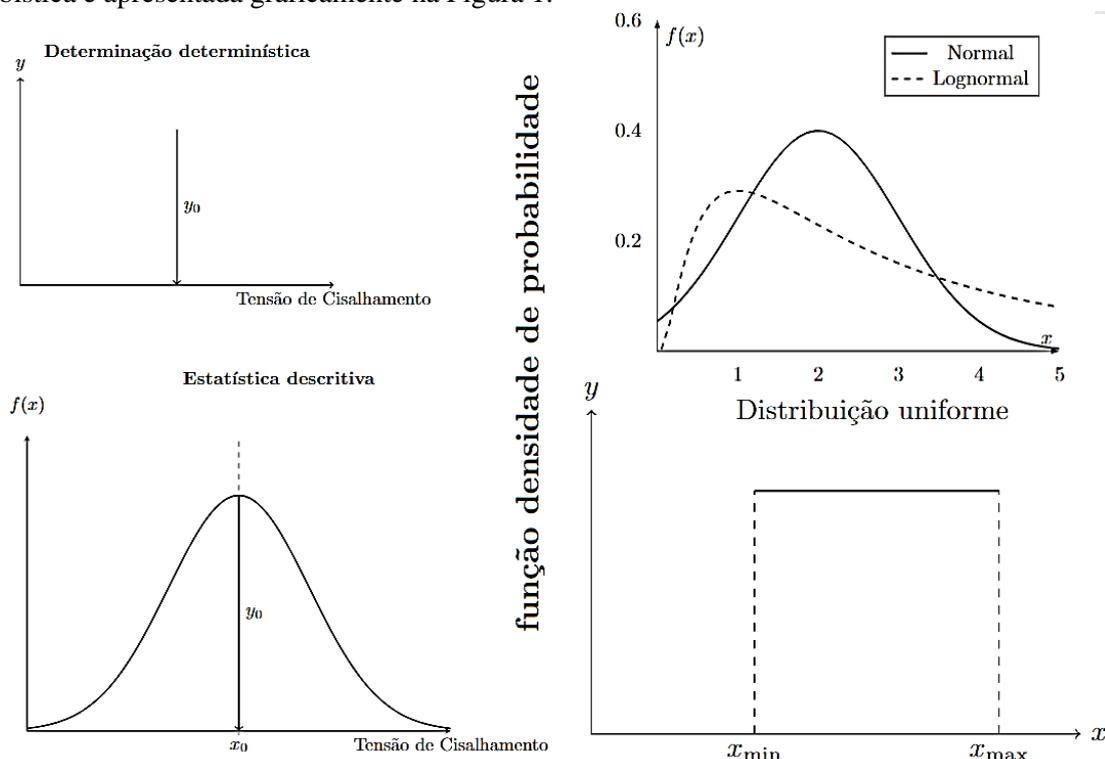


Figura 1. Diferenças da análise probabilística e determinística

(Adaptado de Nadim,2007).

A implementação de um modelo probabilístico necessita como entrada dos parâmetros do solo, média, desvio-padrão e a função densidade de probabilidade, estes três últimos correspondentes ao processo de análise estocástico. Nadim (2007) afirma que a modelagem de incertezas de três forma por: um fator relacionado ao valor da variável aleatória, um parâmetro específico ou um FS global calculado para o estado limite. A análise probabilística para o FS se fez por meio de uma representação de um número amplo de valores para a coesão,

ângulo de atrito e peso específico, cada trio de valor, que representa uma iteração a ser utilizada, pode ou não ser gerado a partir de uma distribuição de probabilidade. A análise fornece uma distribuição de probabilidade de valores para o FS global, representado por média, desvio-padrão e uma distribuição de probabilidade. Um outro resultado obtido também é a análise de sensibilidade que se obtém com a variação de FS resultante de cada um dos parâmetros de solo.

### 3.2 Análise com lógica fuzzy

A lógica *fuzzy* é um método de inteligência artificial que faz uso de princípios de lógica clássica, tendo o conceito de conjuntos *fuzzy* introduzidos por Zadeh (1965). A ideia central de Zadeh sobre os conjuntos *fuzzy* é a existência de graus de pertinência gradativos que assumem valor incerto, enquanto um conjunto tradicional ou *crisp*, dado por  $f: A \rightarrow X$ , define apenas uma saída possível,  $f_A(x) \rightarrow [0,1]$ , para cada elemento  $x \in A$ . A determinação dos graus de pertinência é limitada ao universo de discurso  $U$  ao qual se analisa o conjunto  $A \in U$ . Podem ser definidos diversos conjuntos  $A_1, A_2 \in U$ , atrelados a função de pertinência  $\mu(x)$  correspondente aos conjuntos definidos. O método de inferência define as operações realizadas pelo conectivo lógico, conforme exposto por Zadeh (1965),  $C = A \cup B$  implica em  $\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ , ou ainda,  $\mu_C(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$ .

A forma geral de definir o conjunto  $A$  é válida também para os conjuntos  $A_1, A_2 \in A$ , porém delimitadas aos elementos de  $A_1, A_2$ , conforme a expressão  $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U, 0 \leq \mu_A(x) \leq 1\}$

Regra 1: SE  $x_{11}$  é  $A_1$  E  $x_{21}$  é  $A_2$ , ENTÃO  $y_1$  é  $B_1$

⋮

Regra  $i$ : SE  $x_{1i}$  é  $A_1$  E  $x_{2i}$  é  $A_2$ , ENTÃO  $y_i$  é  $B_j$  (1)

Onde  $i$  representam a  $i$ -ésima regra e  $j$  a  $j$ -ésima variável linguística definida.

A ativação de cada regra, acima, é calculada por  $\mu_i(x) = \mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{A_2}(x) = \min\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x)\}$ . O processo de cálculo da saída é denominado *defuzzificação*, variando conforme o método. No sistema de Mamdani (1975) a ativação de cada regra ativa um ou mais consequentes, delimitando-se uma área no gráfico de um determinado conjunto  $B$ , conforme visto na Figura 2.

Os consequentes são variáveis linguísticas também com funções de pertinência definidas, sendo determinados conjuntos por meio de expressões contextuais: “BAIXO”, “MÉDIO”, “ALTO” ou ainda “NO ENTORNO DE”. Ross (2016) explicita que a ativação total das regras produz uma figura, delimitada conforme  $\mu_B = \mu_1(x) \vee \mu_2(x) \vee \dots \vee \mu_i(x) = \max\{\mu_1(x), \mu_2(x), \dots, \mu_i(x)\}$ , e a saída resultante do modelo é definida como o centróide da área.

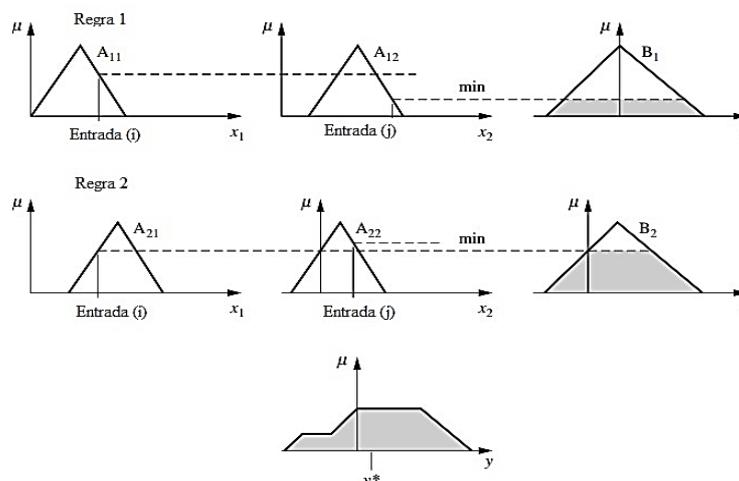


Figura 2. Ativação de uma base de regras  
 (Adaptado de Ross, 2016).

## 4 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

### 4.2 Abordagem probabilística

As análises probabilísticas foram executadas considerando a simulação de Monte Carlo com duas mil iterações. As análises foram conduzidas variando as propriedades geotécnicas tanto do solo da fundação, quanto do solo da camada de aterro. Os coeficientes de variação utilizados foram os valores médios sugeridos por Assis *et al* (2018). A função de distribuição de probabilidade foi adotada foi distribuição lognormal, uma vez que as propriedades do solo tendem a apresentar valores não negativos na natureza (Silva, 2015). Os dados estatísticos utilizados, encontram-se apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 - Parâmetros usados nas análises probabilísticas.

Materiais	$\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )	Mín. Rel.	Máx. Rel.	c (kPa)	Mín. Rel.	Máx. Rel.	$\phi$ (°)	Mín. Rel.	Máx. Rel.
Solo do aterro	20	1,2	1,2	10	4	4	33	6,6	6,6
Solo da Fundação	18	1,08	1,08	0,1	0,04	0,04	31	6,2	6,2

Em seguida, foram obtidos os índices de confiabilidade e as probabilidades de falha. Os resultados derivados da análise probabilística para o perfil ilustrado na Figura 3 (Seção tipo) levando em conta os dados da Tabela 1 ao longo de duas mil iterações.

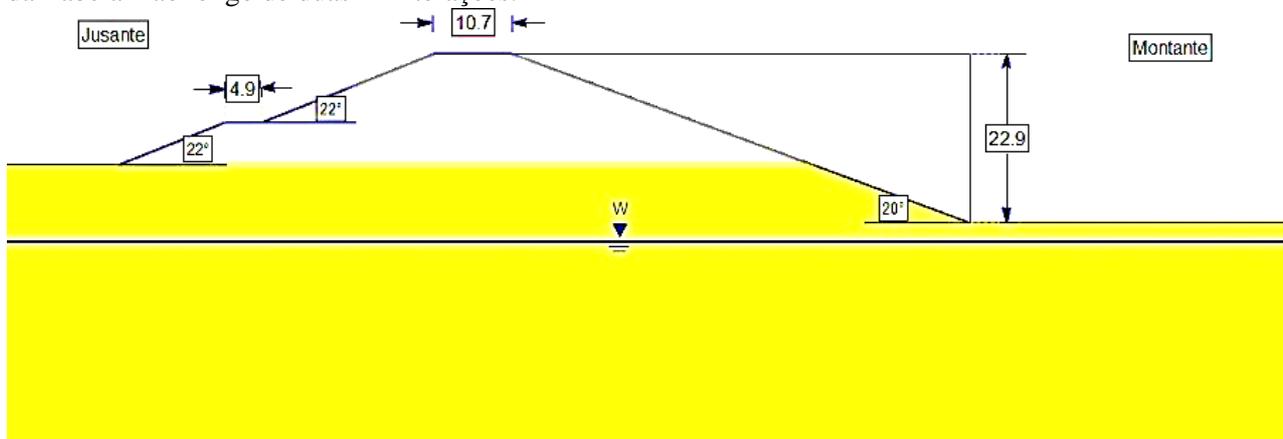


Figura 3 – Seção Tipo

A análise do gráfico de sensibilidade para o lado esquerdo (Jusante) nos revelou a influência observada no FS, através da variação de coesão, peso específico e ângulo de atrito. Figura 4 observou-se que com uma variação percentual de até 100% do valor médio, teremos maior observância do FS para o ângulo de atrito do solo de fundação e para a coesão do solo de aterro. Os resultados obtidos, no entanto, limitaram-se aos intervalos em consideração definidos na Tabela 1.

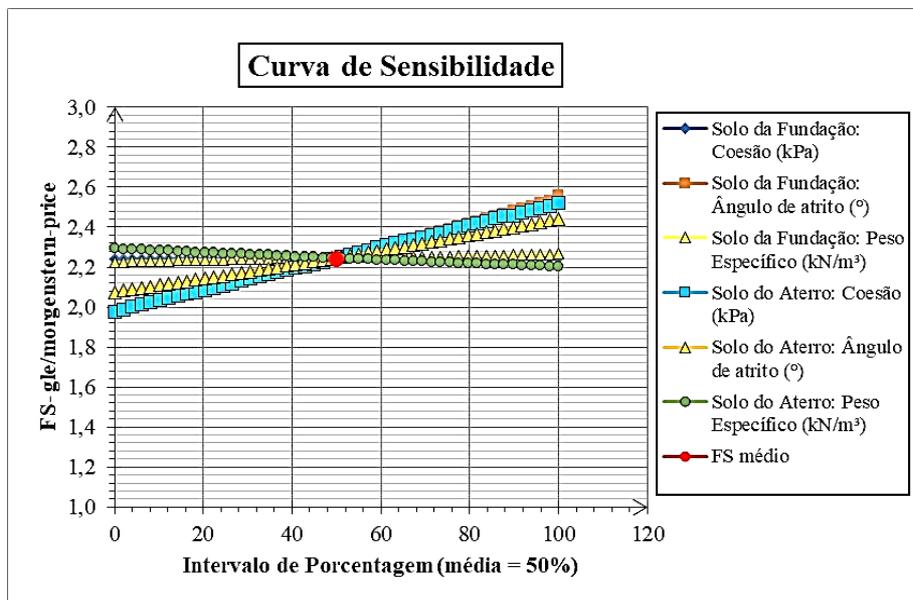


Figura 4 – Gráfico de sensibilidade (Jusante).

Analisando inicialmente o Fator de Segurança (FS) determinístico tanto à montante (FS = 1,668), quanto à jusante (FS = 2,243), observou-se que valores encontrados tenderam a ultrapassar o valor mínimo admissível pela NBR 11682/09 de 1,5. Tal comportamento também foi observado nos resultados probabilísticos, o que sugere um comportamento estável do talude.

Na análise dos demais gerados pela abordagem probabilística, observou-se Probabilidades de Rupturas ( $P_r$ ) nulas para o cálculo com 3 decimais, para ambas as direções do talude. Além disso, os Índices de Confiabilidade ( $\beta$ ) superiores a 3,0, indicando que o desempenho do talude é satisfatório, atendendo os requisitos estabelecidos pela USACE (1997). Neste sentido, assim como constatado pela abordagem *fuzzy*, a análise probabilística também demonstrou FS elevados, indicando a estabilidade do talude por ambas as abordagens.

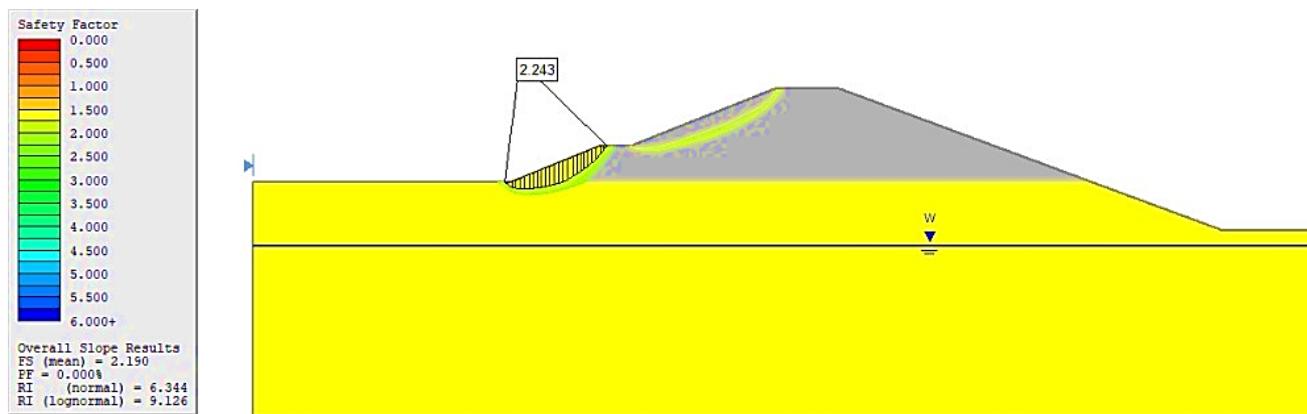


Figura 5 - Resultado das análises probabilísticas (Jusante).

#### 4.1 Abordagem Fuzzy

A implementação da modelagem fuzzy foi utilizada na representação de possíveis valores observáveis para o FS global do lado de Jusante, levando em conta os cenários representados de Souza (2024). Na avaliação realizou-se 3600 iterações de trios de coesão, peso específico e ângulo de atrito possíveis para uma mesma superfície de falha crítica do talude esquerdo. Os resultados foram utilizados para análise de desempenho final do modelo.

Tabela 2 - Parâmetros usados nas análises *fuzzy*.

Materiais	$\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )	Mín.	Máx.	c (kPa)	Mín.	Máx.	$\phi$ (°)	Mín.	Máx.
Solo do aterro	20	16	22	10	0	10	33	25	35
Solo da Fundação	18	16	22	0,1	0	10	31	25	35

A abordagem da lógica *fuzzy* tem influência direta nos dados necessários para modelagem do FS, por exemplo, no sistema de inferência de Mamdani (1975), necessita-se de uma definição da relação entre o conseqüente e antecedente para definição da base de regras. O efeito prático da abordagem citada é uma determinação prévia de como coesão, peso específico e ângulo de atrito se relacionam com o FS.

A adoção de um método determinístico que corresponde a variável a ser modelada auxilia na determinação das relações existentes entre os parâmetros do solo e FS. No estudo adotou-se Morgenstern-Price (equação 2), observando para um incremento igual e intervalo de valores analisados, para coesão, peso específico e ângulo de atrito, um peso maior no FS com o aumento dado, respectivamente, à coesão, ao peso específico e ao ângulo de atrito.

$$FS = \frac{\sum_{ni=1}^n \gamma A \cos \alpha + (\gamma A \sin \alpha - c) \tan \phi}{\sum_{ni=1}^n \gamma A \sin \alpha} \quad (2)$$

Onde,  $F_v$  representa as forças interfatias verticais,  $A$  a área da fatia e  $\alpha$  o ângulo da base.

O sistema de Mamdani (1975) necessita que sejam definidas variáveis linguísticas para o antecedente e conseqüente, sendo a saída resultante calculada pelo centroide de área. A determinação dos intervalos e a adoção das variáveis depende, exclusivamente, da experiência apresentada pelo engenheiro. O número de variáveis linguísticas tem efeito direto na quantidade de regras, uma vez que quanto mais destas variáveis, maiores as ocorrências de conjuntos (coesão, peso específico e ângulo de atrito) distintos a serem analisados. Na determinação do sistema *fuzzy* foi estabelecida apenas uma variável linguística para o ângulo de atrito (MÉDIO) e duas para coesão e peso específico (BAIXO e MÉDIO), sendo esses dois níveis neste último caso por se tratarem de solos diferentes (aterro e fundação) e por acreditar possível a ocorrência combinada destes níveis para estes solos.

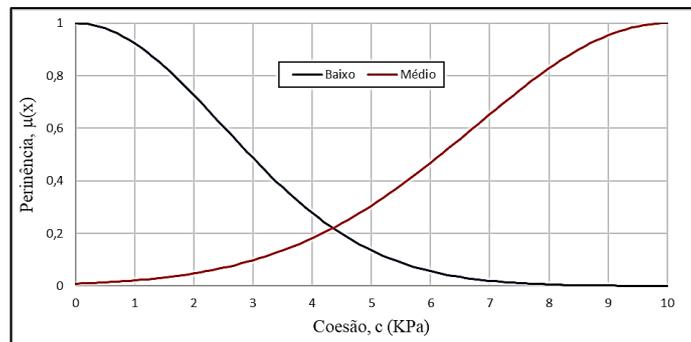


Figura 6. Variáveis linguísticas: coesão (c)

As funções de pertinência foram definidas por uma curva gaussiana, sendo a média desta próxima aos valores observados para as variáveis representadas, conforme figura 7. As curvas foram convenientemente ajustadas de forma que os limites desejados fossem respeitados. Função de pertinência de caráter linear, como triangular ou trapezoidal, foram preteridas, para os conjuntos dos antecedentes pela limitação que impõem.

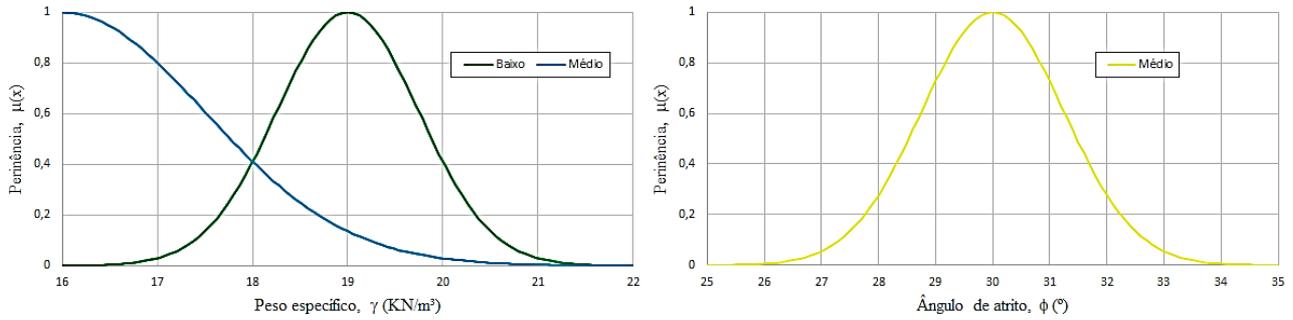


Figura 7. Variáveis linguísticas: peso específico ( $\gamma$ ) e ângulo de atrito ( $\phi$ )

A função de pertinência do consequente adotada foi triangular, visto a facilitar o processo de cálculo da saída pelo método do centróide. A ativação da pertinência para cada regra  $\mu_i(x)$  foi representada pelo produtório por carregar informação de valores extremos, ignoradas pela forma  $\min\{\mu_{A1}(x), \mu_{A2}(x)\}$ .

$$\mu_i(x) = \prod_{j=1}^6 \mu_j(x)$$

O consequente que representa os conjuntos de saídas observáveis para a incidência de cada regra foi representado por quatro variáveis linguísticas, (MÉDIO, MÉDIO ALTO, ALTO e MUITO ALTO), a fim de representar uma quantidade limitada de valores possíveis. Não foram definidos valores MÉDIO ou BAIXO por não serem verificados a incidência destes níveis de FS, dentre os limites mínimos e máximos resultantes das 4 iterações de controle de tritos coesão, ângulo de atrito e peso específico.

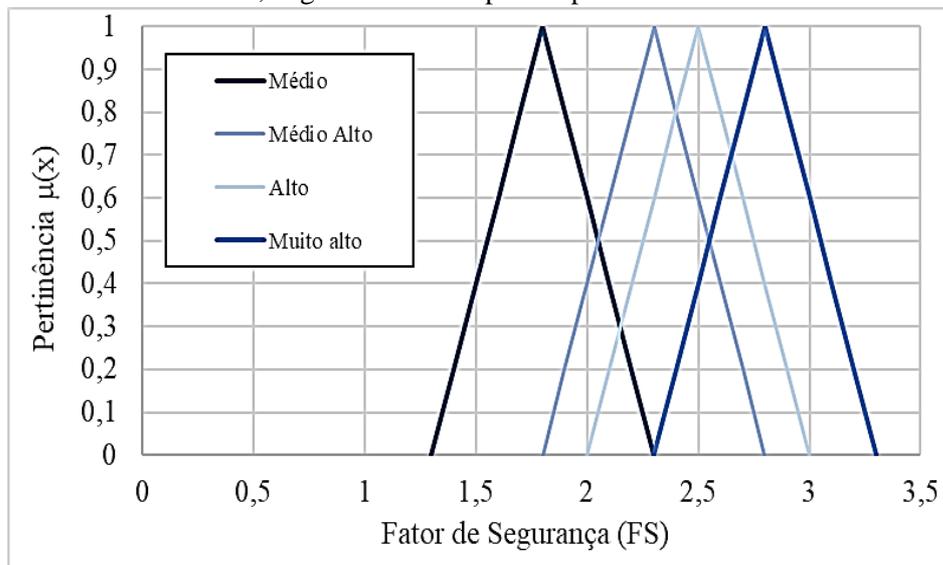


Figura 8. Variáveis linguística: Fator de Segurança (FS).

A base de regras resultante é composta por 16 regras que levam em consideração a variável linguística para antecedente e consequente determinados. O conectivo de ambas as regras e da ativação de cada regra é o “E” e o resultado final da ativação de todas as 16 regras é representada pelo conectivo “OU”, compondo a área ao qual se deve calcular o centróide resultante (saída ou  $FS_{fuzzy}$ ). A tabela 3 expressa de forma sucinta como se deu as possibilidades de ativação das regras.

Tabela 3. Base de regras.

Antecedente							Consequente
Regra	Coesão (c)		Peso específico ( $\gamma$ )		$\hat{\text{Ângulo de atrito}} (\phi)$		FS
	Solo de aterro	Solo de fundação	Solo de aterro	Solo de fundação	Solo de aterro	Solo de fundação	
1			BAIXO	BAIXO			
2			BAIXO	MÉDIO			
3	BAIXO	BAIXO	MÉDIO	BAIXO	MÉDIO	MÉDIO	MÉDIO
4			MÉDIO	MÉDIO			
5			BAIXO	BAIXO			
6			BAIXO	MÉDIO			MÉDIO
7	BAIXO	MÉDIO	MÉDIO	BAIXO	MÉDIO	MÉDIO	ALTO
8			MÉDIO	MÉDIO			
9			BAIXO	BAIXO			
10			BAIXO	MÉDIO			
11	MÉDIO	BAIXO	MÉDIO	BAIXO	MÉDIO	MÉDIO	ALTO
12			MÉDIO	MÉDIO			
13			BAIXO	BAIXO			
14			BAIXO	MÉDIO			MUITO
15	MÉDIO	MÉDIO	MÉDIO	BAIXO	MÉDIO	MÉDIO	ALTO
16			MÉDIO	MÉDIO			

Após a determinação das regras e definição das variáveis foram calculados os  $FS_{\text{determinístico}}$  das 3600 iterações e os  $FS_{\text{fuzzy}}$  correspondentes. Os valores foram dispostos em ordem e plotado no Figura 8 de forma a se avaliar a tendência dos resultados obtidos. Os valores de FS observados nos indicam a tendência de estimar valores próximos a uma média de um grupo de iterações. Os erros de modelagem nos indicam que, a implementação realizada do sistema de Mamdani, tende a subestimar a princípio o valor do FS e se aproximar dos valores limites nos últimos valores avaliados.

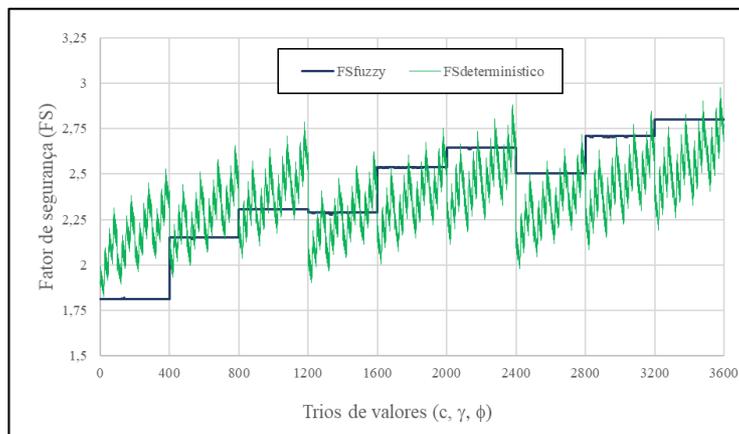


Figura 8. FS (determinístico x fuzzy)

O valor do coeficiente de correlação ficou abaixo do esperado para um modelo bem ajustado. O Erro Quadrático Médio (EQM) evidencia que o erro de estimação não é alto, porém quando analisado em conjunto com o  $R^2$  e, também, graficamente não podemos concluir que o modelo aproxima bem todos os resultados ou tem capacidade de estimação satisfatória. O gráfico (figura 8) indica que de maneira conservadora o FS no entorno de 1,8 como crítico, sendo observado para um pior cenário o FS de 1,9, bastante próximo do resultante do modelo e mais abaixo ao probabilístico.

Tabela 3. Fator de Segurança.

FS <sub>fuzzy</sub>	
R <sup>2</sup>	EQM
0,32	6,27. 10 <sup>-2</sup>

## 5 CONCLUSÃO

Os resultados obtidos através da análise probabilística indicaram através do gráfico de sensibilidade uma maior contribuição do solo de fundação, respectivamente, quanto ao ângulo de atrito e ao peso específico. O resultado apontou que a coesão presente no solo de aterro também tem grande influência na estabilidade no estado limite, nos intervalos verificados.

Os valores de FS críticos observados para a análise probabilística demonstra que para a geometria do aterro considerado e a ocorrência de valores distintos no intervalo delimitado, a probabilidade de ruptura é nula. Os fatores mínimos mais improváveis são considerados satisfatórios. Os resultados evidenciam a importância da análise probabilística e seus resultados, como uma provável sugestão de controle tecnológico para a construção de um aterro.

A lógica fuzzy estimando os valores de cálculo do FS para Morgerstern-Price, apresentou resultados divergentes, no entanto, vale ressaltar o uso de uma base de regras reduzida. Os resultados obtidos são aproximadamente a média agrupada de níveis de valores correspondentes, o que ocasiona em valores reduzidos de EQM, sem inferir em bom ajuste do modelo que foi verificado pelo  $R^2$ .

Aumentar o conjunto de regras e as variáveis linguísticas pode ser uma solução para que se obtenha um melhor desempenho, porém aumentaria consideravelmente o grau de complexidade da implementação pelo sistema de Mamdani (1975). A definição de regras neste caso também teria uma maior complexidade, uma vez que as mesmas derivam diretamente das relações observáveis entre antecedente e consequente. Um maior número de possibilidades para as variáveis linguísticas (Ex.: MUITO BAIXO, ..., MÉDIO, ..., MUITO ALTO), consequentemente, representaria um maior número de relações.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Assis, A. P. *et al* (2018). *Métodos estatísticos e probabilísticos aplicados à geotecnia*. Universidade de Brasília – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental / FT – Geotecnia, Brasília, 278 p.

Silva, C. C. *Análise de estabilidade de um talude da cava de alegria utilizando abordagem probabilística*. 2015. 104 f. Dissertação (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Universidade Federal do Ouro Preto, Ouro Preto, 2015.

Souza, M. C. R. *Análise de estabilidade de talude de barragem de resíduo de mineração: abordagem determinística e probabilística*. 326 f. Dissertação (mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, Universidade Federal do Campina Grande, Centro de Tecnologia, Campina Grande, 2024.

Nadim, F. (2007). *Tools and Strategies for Dealing with Uncertainty in Geotechnics. Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering*, 71–95. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-211-73366-0\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-211-73366-0_2)

Zadeh, L. A. *Fuzzy sets. Information and Control*, New York, v. 8, p. 338- 353, 1965. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)

Mamdani, E. H. (1974). *Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, 121(12), 1585. DOI: <https://doi.org/10.1049/piee.1974.0328> Ross, T. J. (2016). *Fuzzy logic with engineering applications* 4ed. Nashville, TN: John Wiley & Sons.

Silva, M. A. D., Neto, L. B., Sieira, A. C., & Feijó, R. L. (2011). *Previsão do risco de escorregamentos de taludes a partir de um modelo fuzzy. Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, 27(1), 59-75. Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Espanha.

Kacowicz, M. (1987). *Fuzzy slope stability method. Mathematical Geology*, 19(8), 757–767. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00893013>