DOI: 10.47094/COBRAMSEG2026.1/10

Aplicação do Modelo Constitutivo CASM para Avaliação do Comportamento de Rejeitos de Magnetita em Projeto de Alteamento de Barragem

Naiala Fidelis Gomes
Engenheira Geotécnica, DF+ Engenharia, BH, Brasil, ngomes@dfmais.eng.br

Felipe Vianna Amaral de Souza Cruz
Gerente de Geotecnia, DF+ Engenharia, Rio de Janeiro, Brasil, fcruz@dfmais.eng.br

Júnio René Toledo Fagundes
Engenheiro Geotécnico, DF+ Engenharia, BH, Brasil, jfagundes@dfmais.eng.br

Isabela Lima Fonseca
Gerente de Engenharia, DF+ Engenharia, BH, Brasil, ifonseca@dfmais.eng.br

Ewerton Aparecido Rodrigues
Especialista, Mosaic Brasil, Araxá, Brasil, ewerton.rodrigues@mosaicco.com

Thiago Moura de Queiroz e Oliveira
Gerente, Mosaic Brasil, Araxá, Brasil, Thiago.Oliveira20@mosaicco.com

RESUMO: O modelo constitutivo Clay and Sand Model (CASM), proposto por Yu (1998), tem sido aplicado na representação do comportamento mecânico de materiais granulares e finos, incluindo rejeitos de mineração. Baseado na teoria do estado crítico, o modelo permite simular variações volumétricas e a geração de poropressões, aspectos diretamente associados à suscetibilidade à liquefação estática em barragens de rejeitos, fenômeno observado em eventos históricos. Diferentemente de modelos clássicos, como o Cam-Clay, o CASM adota uma linha de compressão de referência representativa do estado mais solto atingível pelo material, proporcionando melhor descrição do comportamento de rejeitos saturados. A aplicação do modelo em rejeitos de magnetita empregados como materiais constituintes de barragens requer a calibração de parâmetros fundamentais, destacando-se o parâmetro de estado (ψ), associado à tendência contrativa ou dilatante do material. A calibração foi conduzida por meio da definição dos parâmetros constitutivos (n), (r) e (m), responsáveis pela forma da superfície de escoamento, pela posição relativa entre a linha de estado crítico e a linha de compressão de referência e pelo controle da resposta plástica associada ao coeficiente de empuxo em repouso (K_0). Os parâmetros foram ajustados com base em ensaios laboratoriais e dados de campo.

PALAVRAS-CHAVE: Modelo Constitutico, CASM, Estado Crítico, Modelagem Numérica, Rejeito de Magnetita.

ABSTRACT: The Clay and Sand Model (CASM) constitutive model, proposed by Yu (1998), has been applied to represent the mechanical behavior of granular and fine materials, including mining tailings. Based on Critical State Soil Mechanics, the model enables the simulation of volumetric changes and pore pressure generation, aspects directly associated with susceptibility to static liquefaction in tailings dams, a phenomenon observed in historical failure events. Unlike classical models such as Cam-Clay, CASM adopts a reference compression line representing the loosest state attainable by the material, providing an improved description of saturated tailings behavior. The application of the model to magnetite tailings used as dam constituent materials requires the calibration of key parameters, particularly the state parameter (ψ), which is associated with the contractive or dilative tendency of the material. Model calibration was performed through the definition of the constitutive parameters (n), (r), and (m), which control the yield surface shape, the relative position between the critical state line and the reference compression line, and the plastic response associated

with the coefficient of earth pressure at rest (K_0), respectively. The parameters were calibrated based on laboratory testing and field data.

KEYWORDS: Constitutive Model, CASM, Critical State, Numerical Modeling, Magnetite Tailings.

1 INTRODUÇÃO

A avaliação do comportamento mecânico de rejeitos de mineração constitui um dos principais desafios da engenharia geotécnica contemporânea, especialmente no contexto da segurança de barragens de rejeitos. Eventos de ruptura, como os ocorridos em Brumadinho (2019) e Merriespruit (1994), evidenciaram a relevância da adequada representação do comportamento não drenado desses materiais, particularmente no que se refere à suscetibilidade à liquefação estática.

Nesse contexto, modelos constitutivos avançados baseados na teoria do estado crítico têm sido amplamente empregados para descrever o comportamento tensão–deformação de materiais granulares e finos. Dentre esses, destaca-se o Clay and Sand Model (CASM), desenvolvido por Yu (1998), capaz de representar simultaneamente mudanças volumétricas, geração de poropressões e degradação de resistência em rejeitos saturados submetidos ao carregamento.

Diferentemente de modelos clássicos, como o Cam-Clay Modificado, o CASM adota uma linha de compressão de referência representativa do estado mais solto atingível pelo material, proporcionando melhor descrição do comportamento de rejeitos de mineração. A aplicação do modelo em rejeitos de magnetita utilizados como materiais constituintes de barragens requer a calibração de parâmetros constitutivos específicos, incluindo o parâmetro de estado (ψ) e os parâmetros (n), (r) e (m), responsáveis pela definição da superfície de escoamento e da resposta plástica do material.

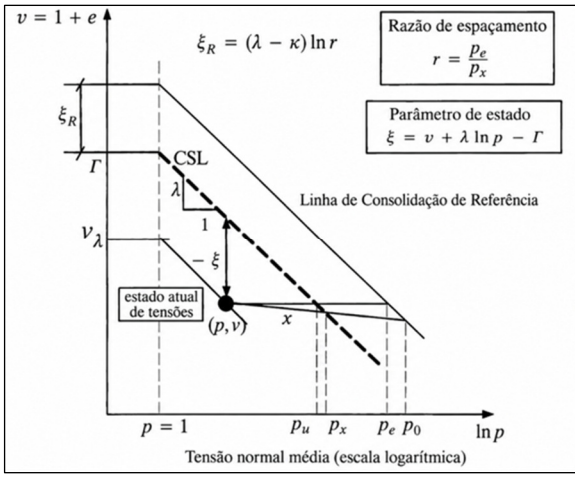
Neste trabalho, o modelo CASM foi implementado no software PLAXIS por meio de um modelo constitutivo definido pelo usuário e calibrado com base em ensaios laboratoriais e dados de campo. A validação foi conduzida por meio de simulações numéricas capazes de reproduzir a geração de poropressões, o comportamento associado à liquefação estática e a evolução da resistência residual sob condições não drenadas. Os resultados demonstram o potencial do modelo como ferramenta robusta para análise do desempenho e da segurança de barragens de rejeitos de magnetita, permitindo a avaliação de cenários críticos e contribuindo para a mitigação de falhas geotécnicas.

2 MODELO CONSTITUTIVO CASM

O modelo constitutivo Clay and Sand Model (CASM) foi inicialmente proposto por Yu (1998). Ele possui a capacidade de simular materiais finos ou granulares com comportamento dúctil ou frágeis. Esse modelo incorpora o conceito de estado crítico e o parâmetro de estado em sua formulação. Na Figura 1 é apresentada uma representação esquemática da abordagem utilizada no CASM no plano (v x ln p').

O modelo CASM aplica uma abordagem similar à utilizada no modelo constitutivo Cam-Clay (Wood, 1990), pois assume-se que as linhas de consolidação são paralelas à linha de estado crítico. Dessa forma, muitos parâmetros presentes no Cam-Clay foram mantidos no CASM.

Diferentemente do modelo Cam-Clay, no CASM a linha de compressão virgem isotrópica foi substituída por uma linha de compressão de referência, assumida como sendo a condição mais fofa provável a que o material poderá estar submetido. Essa alteração foi realizada, pois, segundo Yu (2006), a linha de compressão virgem isotrópica das areias, diferente das argilas, só é atingida em estado de tensões elevados, superiores aos comumente aplicados em problemas de engenharia.



- e: Índice de vazios;
- v: Índice de vazios específico;
- κ: Compressibilidade durante o descarregamento, também denominada compressibilidade elástica;
- λ: Inclinação da linha de estado crítico no plano v x ln p';
- Γ: Índice de vazios específico da linha de estado crítico em p'=1;
- ξ: Parâmetro de estado, neste projeto será utilizado o símbolo ψ;
- ξ_r: Parâmetro de estado de referência, variação de altitude entre a linha de estado crítico e a linha de consolidação de referência. Neste projeto trataremos com o símbolo ψ_r;
- P_0: tensão octaédrica máxima que o material já foi submetido, também chamado de tensão de pré-adensamento; e
- r: Razão espacial.

Figura 1. Representação esquemática de alguns parâmetros do modelo constitutivo CASM (Yu, 2006)

A linha de consolidação de referência no modelo CASM é definida a partir do parâmetro de estado de referência (ψ_r) ou da razão espacial (r). Ambos os parâmetros representam formas para mensurar a distância entre a linha de estado crítico e a linha de referência, sendo, portanto, parâmetros cambiáveis e relacionados pela Equação (1):

$$\psi_r = (\lambda - \kappa) \ln r \tag{1}$$

Tendo em vista o paralelismo assumido entre a linha de estado crítico e a linha de consolidação de referência, o parâmetro de estado está diretamente relacionado com a razão de pré-adensamento (overconsolidation ratio – OCR = p'0/p') pela Equação (2). Assim, verifica-se que, para representação de materiais dilatantes, faz-se necessária a utilização de OCR>1.

$$\psi = (\lambda - \kappa) \ln r \, (1 + \frac{\ln p'/p0}{\ln r}) \tag{2}$$

Para representação do comportamento elástico, o modelo CASM admite os seguintes parâmetros de entrada: o coeficiente de Poisson (ν) e a inclinação da linha de descarregamento (k). O parâmetro (k) está relacionado ao módulo volumétrico (K) pela Equação (3).

$$K = \frac{(1 + e)\, p'}{k} \tag{3}$$

Observa-se que o módulo volumétrico não é um valor constante, pois ele tende a variar com a tensão média e com o índice de vazios. Tendo em vista que o modelo assume um valor constante para o coeficiente de Poisson, têm-se como consequência o módulo de cisalhamento também variando com a tensão média e o índice de vazios.

A função de plastificação (*f*) adotada no modelo é apresentada na Equação (4) em função do parâmetro de estado e, na Equação (5), em função do OCR. Destaca-se que (n) é um parâmetro que controla o formato da superfície e (M_θ) é a inclinação da Linha de Estado Crítico (LEC) no plano (q x p').

$$f = (\frac{q}{M_\theta p'})^{n} + \frac{\psi}{\psi_r} - 1 \tag{4}$$

$$f = (\frac{q}{M_\theta p'})^{n} + \frac{1}{\ln r} \ln (\frac{p'}{p'_0}) \tag{5}$$

Arroyo e Gens (2021) alteraram a proposta original de Yu (1998) incorporando ao valor de (M_θ) os efeitos da variação da tensão principal intermediária (capturada pela mudança no ângulo de Lode – θ). Eles aplicaram a relação apresentada na Equação (6), proposta por Sheng *et al*. (2000).

$$M_\theta = M_{TC}\ \left(\frac{2\,\alpha^4}{1+\ \alpha^4+(1-\ \alpha^4)\ sen3\theta}\right)^{1/4} \tag{6}$$

Onde (M_{tc}) é a inclinação da linha de estado crítico em condições de compressão triaxial (θ=30°) e (α) é um parâmetro que controla a forma da função. Ambos são definidos a partir do ângulo de atrito no estado crítico (ϕ'_{cs}), respectivamente, pela Equação (7) e Equação (8).

$$M_{TC} = \frac{6\ sen\ \phi_{cv}}{3-\ sen\ \phi_{cv}} \tag{7}$$

$$\alpha = \frac{3-\ sen\ \phi_{cv}}{3+\ sen\ \phi_{cv}} \tag{8}$$

O tamanho do domínio elástico é controlado pela tensão de pré-adensamento (p'_0). No modelo CASM, é assumida uma lei de endurecimento baseada nas deformações volumétricas plásticas, igual ao Cam-Clay, conforme apresentado na Equação (9).

$$\frac{\partial p'_0}{\partial \varepsilon_p^p} = \frac{(1+e)\ p'_0}{\lambda-\kappa} \tag{9}$$

Ressalta-se que, tendo em vista que a lei de endurecimento não depende das deformações cisalhantes, o modelo CASM, na versão aplicada por Arroyo e Gens (2021), não consegue capturar o aumento de resistência do material após atingir a linha de estado crítico, situação tipicamente verificada em materiais com parâmetros de estado próximos a zero.

Por fim, a função potencial plástica (*g*) adotada por Arroyo e Gens (2021) também é diferente da formulação original de Yu (1998). Os autores relataram que esta alteração mostrou uma melhora na convergência numérica do modelo. O potencial plástico aplicado está apresentado na Equação (10), onde (m) é um parâmetro que controla a forma do potencial plástico e (p_c) é dado pela Equação (11), devendo ser resolvido para o estado de tensão atual.

$$g = \left(\frac{q}{M_\theta p'}\right)^m + \mathrm{m} - 1 - \frac{p_c\ (m-1)}{p'} \tag{10}$$

$$p_c = \frac{p}{m-1}\ \left[\left(\frac{q}{Mp'}\right)^m - 1\right] \tag{11}$$

Observa-se que a função potencial plástica é diferente da superfície de plastificação (Equação (5)). Assim, têm-se que o modelo CASM não possui lei de fluxo associado. O parâmetro (m) pode ser usado para ajustar a resposta do modelo em trajetórias oedométricas, garantido que o coeficiente de empuxo no repouso (K_0) permaneça com um valor especificado, sem sofrer alterações devido às deformações plásticas. A relação entre (K_0) e (m) é dada pela Equação (12).

$$\frac{3\ (\lambda-\kappa)}{2\ \lambda} = \left[\frac{M}{m} - M\right]\left[\left(\frac{1}{M}\frac{3(1-K_0)}{1+2K_0}\right) - \left(\frac{1}{M}\frac{3(1-K_0)}{1+2K_0}\right)^{1-m}\right] \tag{12}$$

Para materiais normalmente adensados, é possível desenvolver equações que relacionam a resistência não drenada de pico (S_{up}) com os parâmetros (r) e (n) (Equação (13)), e a resistência não drenada residual (S_{ur}) com o parâmetro (r) (Equação (14)), onde ($\sigma'_{v,ini}$) é a tensão vertical inicial.

$$\exp\left[\left(\frac{1}{\sqrt[n]{n\ ln\ r}}\right)^n \ln r\right] = \frac{M}{2\frac{\sigma'_v}{S_{up}}\sqrt[n]{n\ ln\ r}} \exp\left[\left(\frac{q_{ini}/p'_{ini}}{M}\right)^n \ln r\right] \exp\left[\frac{\lambda-\kappa}{\kappa}\ln\left(\frac{M}{2\frac{\sigma'_v}{S_{up}}\sqrt[n]{n\ ln\ r}}\right)\right] \tag{13}$$

$$r = \left[\frac{M}{6}(1 + 2K_0)\left(\frac{\sigma'_{v,ini}}{S_{ur}}\right)\right]^{\frac{\lambda-\kappa}{\kappa}} \quad (14)$$

3 PARAMETRIZAÇÃO DO REJEITO DE MAGNETITA

Os parâmetros (Γ e λ) que controlam a Linha de Estado Crítico (LEC) do Rejeito de Magnetita foram definidos a partir dos ensaios de compressão triaxiais. Os ensaios foram realizados a partir de amostras deformadas coletadas no maciço e na berma de reforço de uma barragem de rejeito. Tendo em vista que a granulometria das duas amostras de magnetita (maciço e reforço) são praticamente coincidentes, foram considerados os ensaios de ambas para definição dos parâmetros que controlam a LEC (Γ e λ). Conforme apresentado na Figura 2, decidiu-se utilizar a LEC mais restritiva em termos de índice de vazios (volume específico), modelando-se, portanto, apenas um material de magnetita. Para a determinação do (M_{tc}) do material, foi definida a inclinação da LEC no plano (p' x q), conforme ilustrado na Figura 2. Além disso, foi definida a linha de instabilidade (LI).

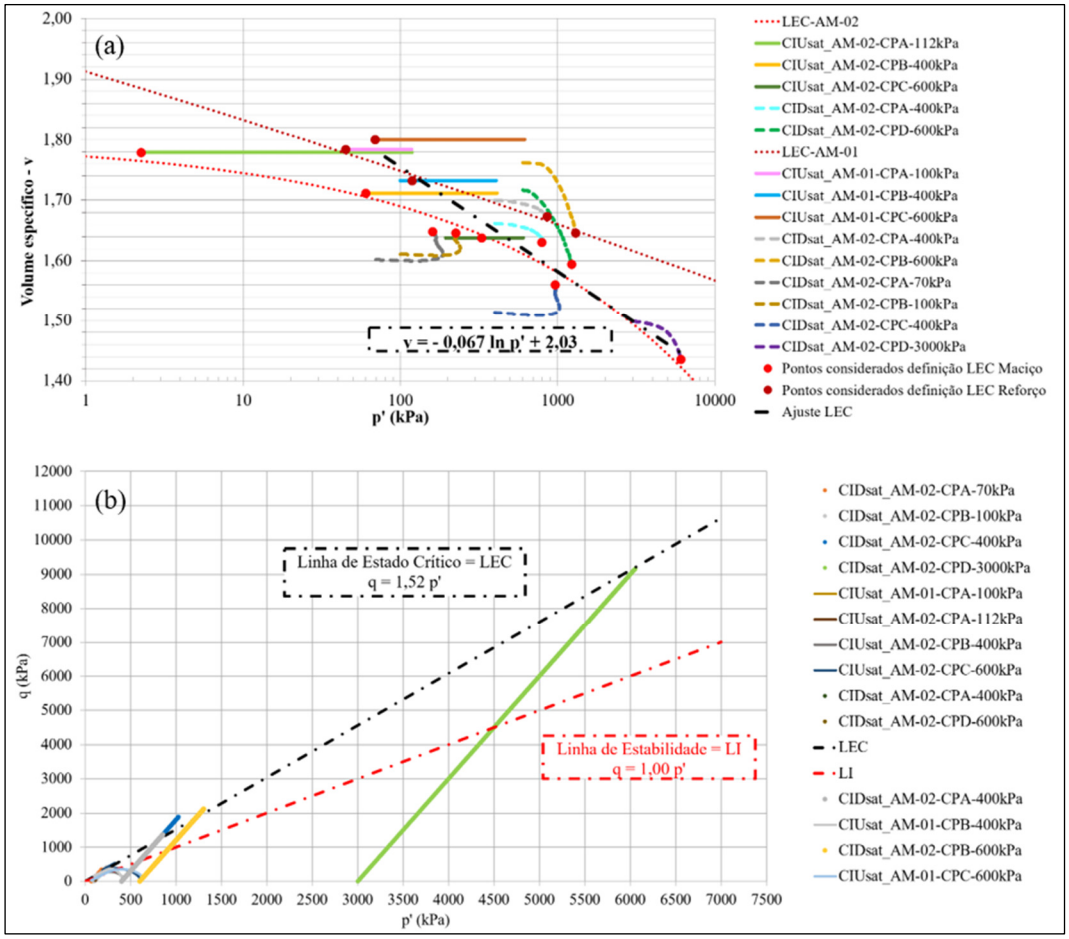


Figura 2. Linha de Estado Crítico, Envoltória de Estado Crítico e Linha de Instabilidade – Rejeito de Magnetita – (a) p' x v e (b) p' x q

A razão espacial (r) foi estabelecida utilizando-se a Equação (14). A resistência não drenada residual solicitada na Equação (14) foi estimada a partir da formulação proposta por Been e Jefferies (2016), que correlaciona os parâmetros de estado obtidos dos ensaios CPTu's com os ensaios triaxiais realizados no material para definição da LEC, conforme mostra a Equação (15). Na Figura 3 é apresentado o resumo dos dados e o tratamento estatístico dos parâmetros de estado para a magnetita do maciço da barragem, contendo os valores avaliados dos percentis 70, 75, 80, 90, 95 e 99%.

Os parâmetros de estado apresentaram valores variando de 0,0454 para o percentil 70 até 0,19 para o percentil 99. Assim, foi assumido o valor de parâmetro de estado referente ao percentil de 80%, sendo este de 0,0708. A este valor foi acrescido 0,05, referente à interpretação mais restritiva da incerteza de ±0,05 associada à estimativa de ψ, conforme proposto por Been e Jefferies (2016), resultando, portanto, em 0,1208. Em seguida, foram utilizados os parâmetros $\lambda_e = 0{,}075$ e $M_{tc} = 1{,}52$, obtidos através da análise da LEC. Com base nesses dados, aplicou-se a formulação proposta por Been e Jefferies (2016), resultando em uma razão de resistência não drenada residual de 0,111 para um k_0 de 0,60. Devido a ausência de ensaios de campo para estimativa do valor de k_0, este foi estimado com base em resultados encontrados em ensaio de campo realizados em outras estruturas de disposição de rejeito.

$$\frac{Su_{res}}{p'_{vo}} = \frac{M}{2} e^{\left(-\psi/\lambda_e\right)} \therefore \frac{Su_{res}}{\sigma'_{vo}} = \frac{Su_{res}}{p'_{vo}} \cdot \frac{1+2K_0}{3} \quad (15)$$

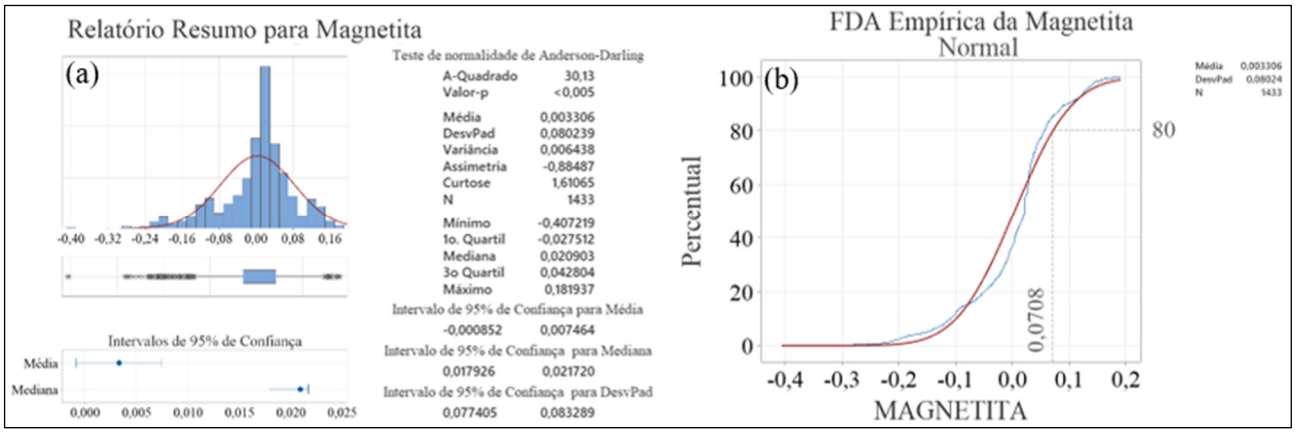


Figura 3. Tratamento estatístico dos dados de parâmetro de estado – Magnetita – (a) Relatório resumo da estatística e (b) FDA Empírica da estatística

O parâmetro que controla a forma da superfície de plastificação (n) foi definido utilizando-se a Equação (13). A determinação da resistência não drenada de pico solicitada na equação foi realizada a partir dos ensaios triaxiais não drenados realizados na magnetita, conforme apresentado na Figura 4. A partir da resistência não drenada de pico encontrada em cada corpo de prova ensaiado, foi gerado um gráfico S_u (resistência não drenada de pico) x p'_0 (tensão confinante), de onde se obteve a razão ($S_{u,pico}/p'_0$ =0,341), que resultou no valor de 0,250 para $S_{u,pico}/\sigma'_0$ a partir de um k_0 de 0,60.

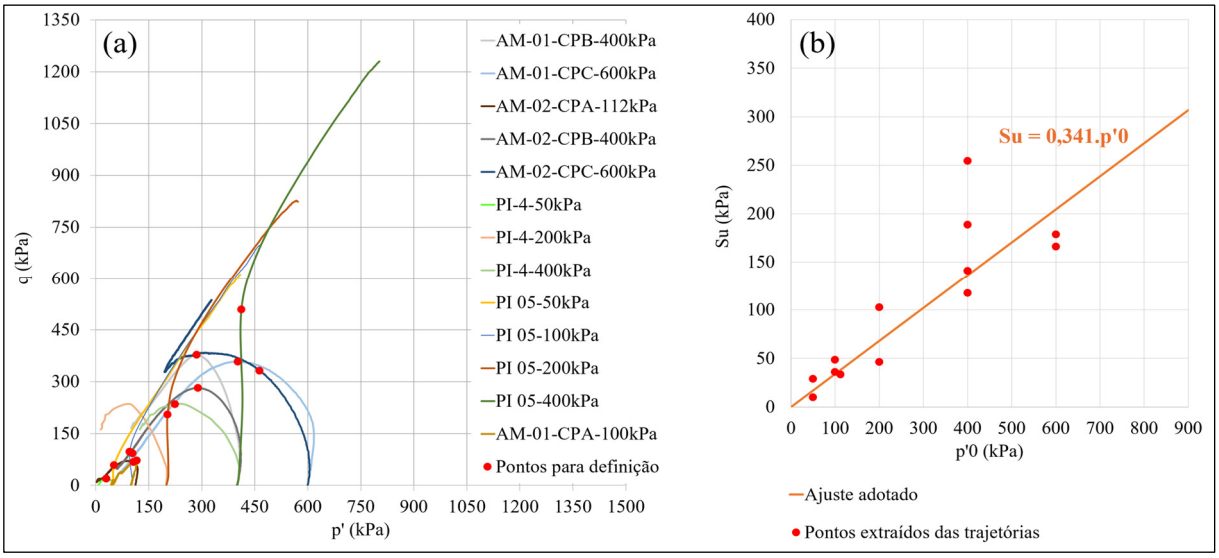


Figura 4. Obtenção $S_{u,pico}/p'_0$ – Magnetita – (a) p'xq e (b) p'0xSu

Para a determinação do parâmetro que controla a forma do potencial plástico (m), utilizou-se a Equação (12). A compressibilidade elástica (κ) foi estimada com base no resultado dos ensaios oedométricos apresentados na Figura 5, para a qual foi adotado o valor de 0,009, sendo este referente à média (0,011) subtraída do desvio padrão (0,002). Já o coeficiente de Poisson (ν) foi adotado com base nos resultados utilizados por Arroyo e Gens (2021).

A Tabela 1 apresenta os parâmetros CASM resultantes de toda análise para a magnetita.

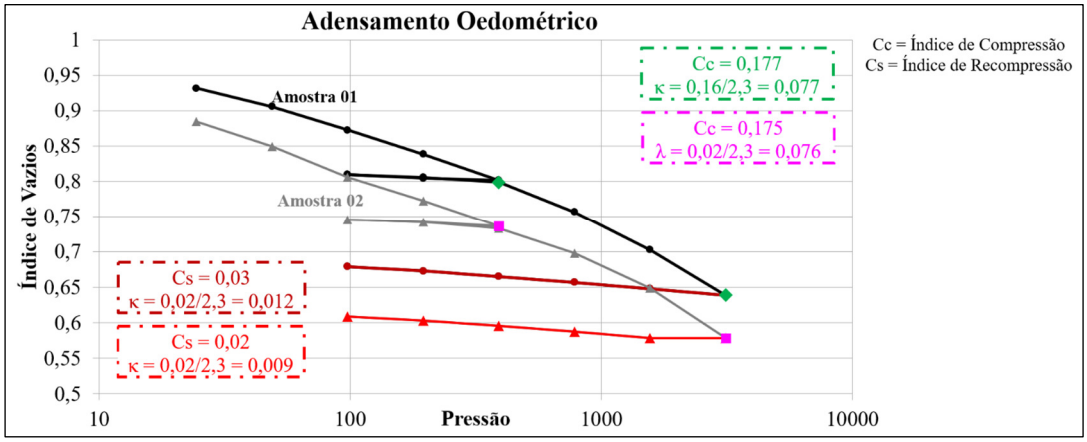


Figura 5. Adensamento Oedométrico– Magnetita

Tabela 1. Parâmetros CASM para representar o rejeito de magnetita.

Linha de estado crítico		Resistência		Plasticidade				Elasticidade		
Γ	λ	$S_{u,pico}/\sigma'_{v0}$	$S_{u,res}/\sigma'_{v0}$	M_{tc}	r	n	m	κ	ν	OCR
2,1	0,075	0,25	0,111	1,52	6,63	3,38	1,795	0,011	0,3	1

4 VALIDAÇÃO DO MODELO CASM

Para a validação dos parâmetros adotados na modelagem do rejeito de magnetita pelo modelo constitutivo CASM, foram realizadas simulações numéricas de ensaios triaxiais não drenados sob compressão, utilizando a ferramenta Soil Test do software PLAXIS. Os resultados obtidos foram comparados com os ensaios triaxiais laboratoriais realizados em amostras representativas do rejeito de magnetita, conforme apresentado na Figura 6.

Observa-se que o modelo CASM foi capaz de reproduzir satisfatoriamente o comportamento tensão–deformação do material para diferentes níveis de tensão confinante. Nos gráficos de (q × εa), verifica-se que o modelo captura adequadamente o aumento da resistência de pico com o incremento da tensão de confinamento, bem como a tendência de amolecimento pós-pico observada nos ensaios laboratoriais. De forma consistente, a evolução da poropressão (u) ao longo da deformação axial também é representada de maneira satisfatória, indicando que o modelo consegue reproduzir a geração de poropressões associada ao comportamento contrativo do material sob carregamento não drenado.

No plano de tensões efetivas (p' × q), nota-se que as trajetórias de tensão simuladas pelo CASM apresentam boa concordância com os resultados experimentais, reproduzindo a aproximação das trajetórias à região de estado crítico. Essa correspondência evidencia que os parâmetros calibrados são capazes de representar adequadamente a resposta mecânica do rejeito de magnetita sob diferentes níveis de confinamento. De modo geral, os resultados indicam que o conjunto de parâmetros adotado apresenta boa capacidade de representar o comportamento não drenado do rejeito de magnetita, fornecendo uma base consistente para sua aplicação em análises numéricas envolvendo simulações de estabilidade e avaliação da suscetibilidade à liquefação em estruturas de disposição de rejeitos.

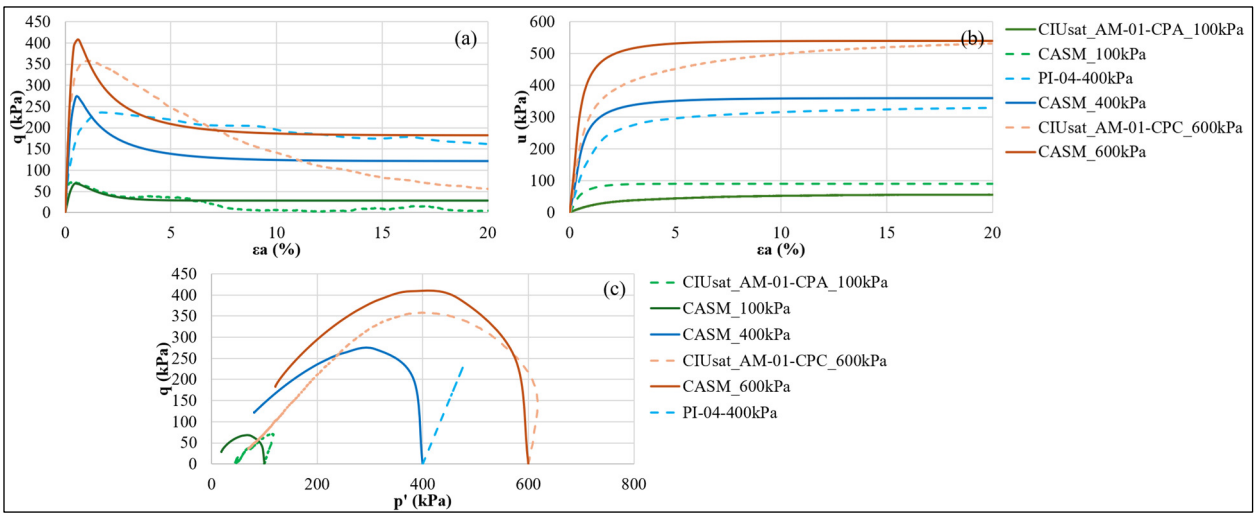


Figura 6. Validação da implementação do CASM em ensaios triaxiais convencionais

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados obtidos demonstram que o modelo constitutivo Clay and Sand Model (CASM) é capaz de representar de forma consistente o comportamento tensão–deformação de rejeitos de magnetita. A calibração dos parâmetros constitutivos, baseada em ensaios laboratoriais, permitiu reproduzir adequadamente a resposta observada em ensaios triaxiais, incluindo a evolução da resistência e o desenvolvimento de poropressões sob condições não drenadas.

As simulações numéricas realizadas no PLAXIS, a partir da implementação do CASM como modelo constitutivo definido pelo usuário, apresentaram boa concordância com os resultados experimentais para diferentes tensões confinantes. Os resultados indicam que o modelo é capaz de representar mecanismos relevantes associados ao comportamento contrativo e à redução de resistência do material.

Dessa forma, o CASM mostra-se uma ferramenta promissora para a modelagem numérica de rejeitos de mineração, contribuindo para análises mais realistas e para o aprimoramento das avaliações de segurança de barragens de rejeitos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arroyo, M., Gens, A. (2021) *Computational analyses of Dam I failure at the Corrego de Feijao mine in Brumadinho*, Final Report. CIMNE, Barcelona.

Been, K., Jefferies, M. G. (2016) Soil Liquefaction: A Critical State Approach, 2nd ed., Taylor & Francis, London and New York.

Sheng, D., Sloan, S. W., Yu, H. S. (2000) Aspects of finite element implementation of critical state models. Computational Mechanics, 26, p. 727-737.

Wood, D. M. (1990) Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge.

Yu, H. S. (1998) CASM: A unified state parameter model for clay and sand. International *Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 22, p. 621-653.

Yu, H. S. (2006) *Plasticity and Geotechnics*, Springer Science, New York.

Slide 1: Slide de título — Aplicação do Modelo Constitutivo CASM na avaliação do comportamento de rejeitos de magnetita em projeto de alteamento de barragem
Autores, DF+ Engenharia e Mosaic Brasil; COBRAMSEG 2026, Brasília/DF